LES NOMBRES COMPLEXES

Objectifs :

- **Prendre conscience de l'utilité des nombres complexes dans notre contexte universitaire.**
- **Se familiariser avec les différents types d'écriture.**
- **Résoudre des exercices**

Prérequis :

- **Connaître l'ensemble des règles liées aux triangles rectangles.**
- **Savoir tracer des vecteurs de FRESNEL et en faire la somme**

Appui technique : Vidéo

https://www.youtube.com/watch?v=ABo2m52oEYw

Nota : cette ressource contient le nécessaire pour débuter dans le parcours universitaire GEII mais pas l'ensemble des lois et règles gravitant autour des nombres complexes qui seront vues ultérieurement

1.POURQUOI LES COMPLEXES ?

Soient deux tensions :

$$V1(t) = 220\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$$

$$V2(t) = 110\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

Où **110 V** et **220 V** sont les tensions efficaces et $\boldsymbol{\pi/3}$ (60°) et $\boldsymbol{\pi/6}$ (30°) sont les déphasages des tensions **V1(t)** et **V2(t)** par rapport à un signal de référence qui débuterait à 0V à t=0.

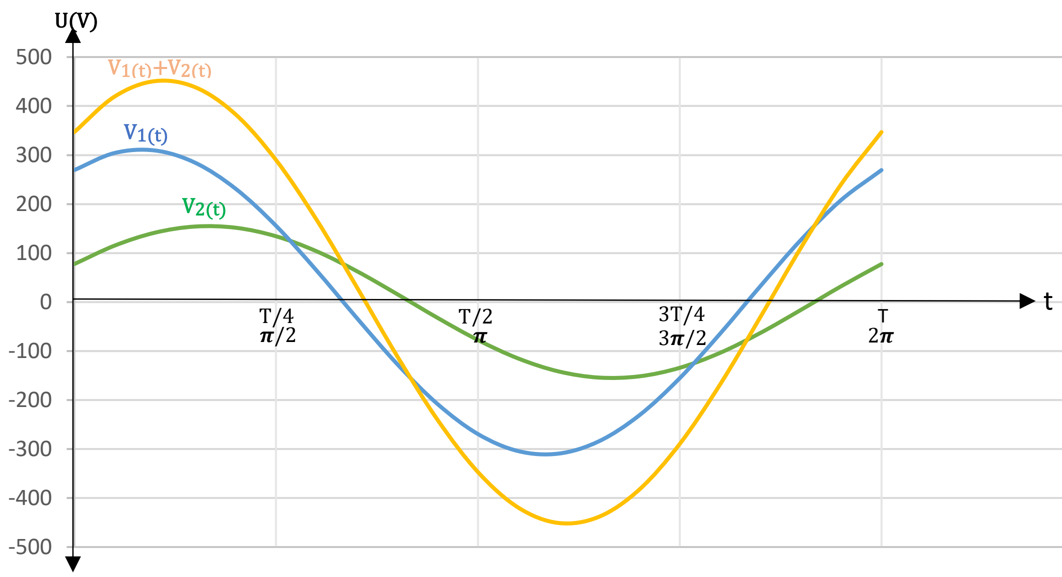
Nota : si vous ne maîtrisez pas ces équations, pas de panique, laissez-vous guider dans cette ressource….

On souhaite effectuer la somme V1(t) + V2(t) et déterminer son déphasage θ

Nota : il est interdit de faire $220\sqrt{2} + 110\sqrt{2}$ *ce serait trop simple*

1.1 Essayons dans le domaine temporel :

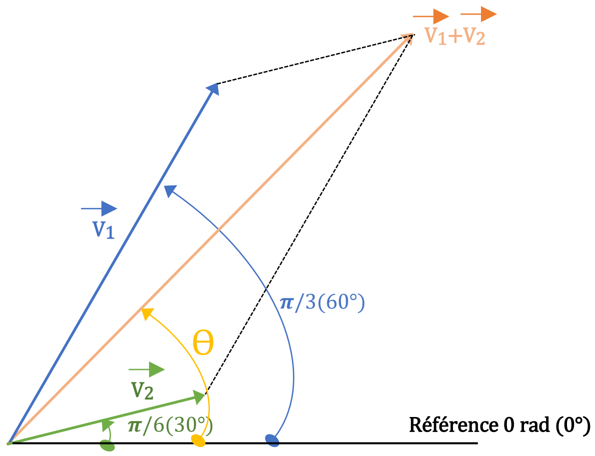
On trace les deux tensions $V_{1(t)}$ et $V_{2(t)}$ et on effectue graphiquement la somme $V_{1(t)} + V_{2(t)}$



La méthode est difficile à mettre en œuvre et deviendrait très vite compliquée si on souhaite effectuer d'autres opérations (multiplications ou divisions)…….Voyons une autre méthode…..

1.2 Essayons dans le plan de Fresnel :

On trace à l'échelle les vecteurs de FRESNEL ($||\overrightarrow{V1}||$ = 220 et $||\overrightarrow{V2}||$ =110) en respectant leur sens et direction, on effectue ensuite la somme graphiquement. Une simple règle de trois par rapport à l'échelle choisie nous donnera la valeur de la somme. L'utilisation d'un rapporteur celle de la phase **θ**.

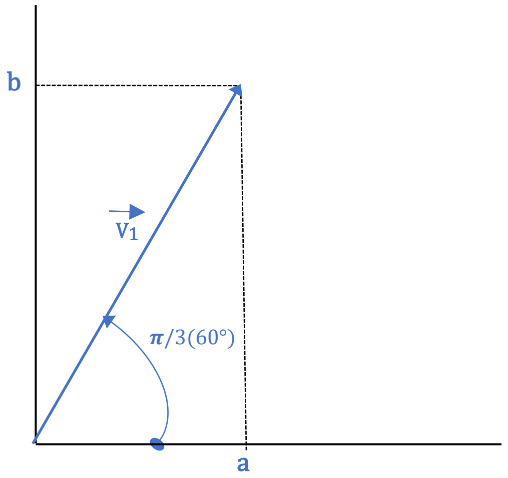


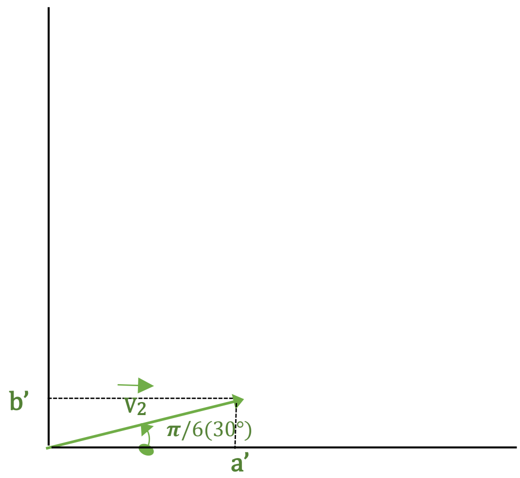
La méthode est simple à mettre en œuvre et souvent utilisée, mais deviendra très compliquée si on souhaite effectuer d'autres opérations (multiplications ou divisions) …Voyons une autre méthode…

1.3 Essayons de « mathématiser » la méthode précédente :

Commençons par isoler nos tensions et effectuer une projection des vecteurs qu'elles représentent sur un axe horizontal et un axe vertical. On rappellera que **$\|\overrightarrow{V1}\|$ = 220 et $\|\overrightarrow{V2}\|$ = 110**

On reconnaît dans les deux cas le triangle rectangle dont on connaît les propriétés.

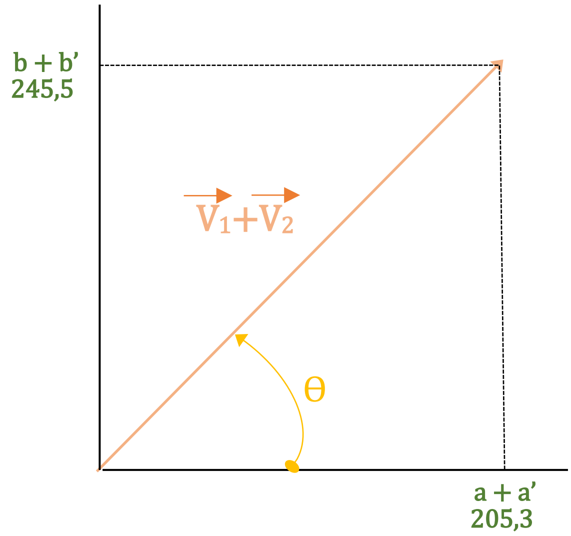




Je vous laisse le soin de calculer **a, b, a' et b'**. Je vous donne toutefois le résultat afin de vérifier vos calculs

a = 110   b = 190,5   a' = 95,3   b' = 55

La projection du vecteur représentant de la somme **$\overrightarrow{V1} + \overrightarrow{V2}$** sera :



En utilisant les règles du triangle rectangle, il est facile de retrouver la valeur de **$\|\overrightarrow{V1} + \overrightarrow{V2}\|$** et sa phase $\boldsymbol{\theta}$.

Je vous laisse le soin de calculer $\boldsymbol{\theta}$ et la valeur de la somme **$\|\overrightarrow{V1} + \overrightarrow{V2}\|$**. Je vous donne toutefois le résultat afin de vérifier vos calculs

θ = 50° soit 0,873 Rad $\|\overrightarrow{V1} + \overrightarrow{V2}\|$ = 320

Résultat final : $V1(t) + V2(t) = 320\sqrt{2}\,\sin(\omega t + 0{,}873)$

Nota : La méthode est plus élégante…Et nous venons d'utiliser sans le savoir une des règles des nombres complexes dont nous allons nous intéresser…….

2.LES NOMBRES COMPLEXES

2.1 Définition

Le nombre complexe **« j »** est un nombre dont le carré est égal à **-1**.

*Nota : Cela peut vous paraître surprenant, mais lorsque l'on entre dans le domaine complexe, on entre aussi dans un **« monde imaginaire »** très adapté pour effectuer bon nombre de calculs dans notre spécialité.*

Notre point de départ est donc le suivant :

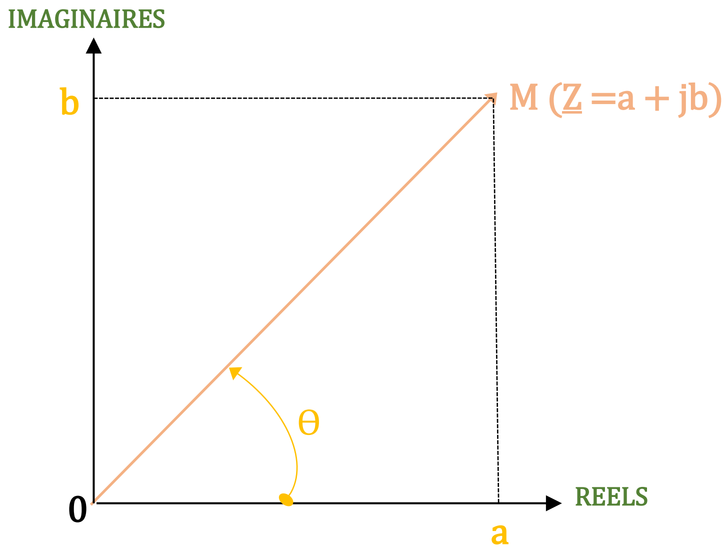
$$j^2 = -1$$

Soit un point **M** dans un repère orthonormé avec en abscisse l'axe des **« réels »** et en ordonné l'axe des **« imaginaires ».**

On appellera **« affixe »** de ce point **M** le nombre complexe $\underline{Z}$ **= a + jb** où **a** et **b** sont des nombres réels (on notera la barre sous le Z).

« a » est appelé la partie réelle et **« b »** la partie imaginaire du complexe $\underline{Z}$

Effectuons sa représentation graphique :



La longueur **0M** est le **« module »** de $\underline{Z}$ noté : **|$\underline{Z}$|**

$\boldsymbol{\theta}$ est **« l'argument »** de $\underline{Z}$

En appliquant les règles du triangle rectangle, **<u>il faudra retenir</u>** :

$$\textbf{Module de } \underline{Z} : |\underline{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

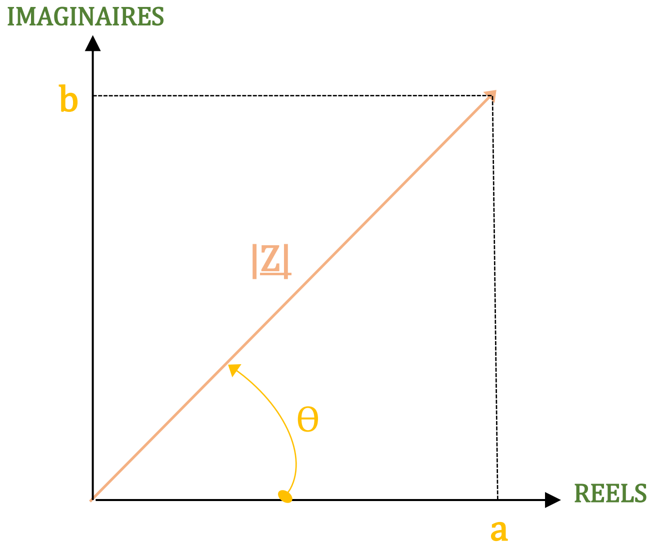
$$\textbf{Argument de } \underline{Z} : \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{b}{|\underline{Z}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a}{|\underline{Z}|}\right)$$

Nota : Nous verrons ultérieurement qu'il faudra prendre des précautions si la partie réelle d'un nombre complexe est négative.

2.2 Les différentes écritures

L'écriture $\underline{Z}$ = a + jb est appelée écriture sous la forme algébrique

Sur la figure précédente, il n'y a plus nécessité de positionner le point M. On vient de définir le module de $\underline{Z}$ d'où :



De cette figure, on peut alors écrire, dans le respect des règles du triangle rectangle :

$$a = |\underline{Z}|.\cos(\theta) \quad \text{et} \quad b = |\underline{Z}|.\sin(\theta)$$

$$\underline{Z} = a + jb = |\underline{Z}|.\cos(\theta) + j.|\underline{Z}|.\sin(\theta)$$

Ce qui donne après factorisation **:** $\underline{Z} = a + jb = |\underline{Z}|.[\cos(\theta) + j.\sin(\theta)]$

Nota : Le point dans les relations est le signe de la multiplication

L'écriture $\underline{Z} = |\underline{Z}|.[\cos(\theta) + j.\sin(\theta)]$ est appelée écriture sous la forme trigonométrique

Si on utilise la fonction exponentielle et en posant $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j.\sin(\theta)$ alors :

$$\underline{Z} = a + jb = |\underline{Z}|.e^{j\theta}$$

L'écriture $\underline{Z} = |\underline{Z}|.e^{j\theta}$ est appelée écriture sous la forme exponentielle.

Nota : ne vous laissez pas impressionner par cet aspect mathématique c'est un simple jeu d'écriture

IMPORTANT

Votre devrez maîtriser le passage d'une écriture à l'autre pour effectuer les différentes opérations

Ecriture forme Algébrique	↔	Ecriture forme Trigonométrique	↔	Ecriture forme Exponentielle
$\underline{Z} = a + jb$		$\underline{Z} = \lvert\underline{Z}\rvert.[\cos(\theta) + j.\sin(\theta)]$		$\underline{Z} = \lvert\underline{Z}\rvert.e^{j\theta}$

Nota : tout ce que l'on vient de voir est basé uniquement sur les règles du triangle rectangle. Ce n'est pas plus compliqué !!!!!!

2.3 Les opérations :

2.3.1 Additions et soustractions :

Utilisation de l'écriture sous la forme algébrique :

$$\underline{Z}_1 = a_1 + jb_1 \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = a_2 + jb_2$$

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (a_1 + a_2) + j.(b_1 + b_2)$$

$$\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = (a_1 - a_2) + j.(b_1 - b_2)$$

2.3.2 Multiplications et divisions :

Utilisation de l'écriture sous la forme exponentielle

$$\underline{Z}_1 = \lvert\underline{Z}_1\rvert.e^{j\theta 1} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = \lvert\underline{Z}_2\rvert.e^{j\theta 2}$$

$$\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 = \lvert\underline{Z}_1\rvert.\lvert\underline{Z}_2\rvert.e^{j(\theta 1 + \theta 2)}$$

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\lvert\underline{Z1}\rvert}{\lvert\underline{Z2}\rvert} e^{j(\theta 1 - \theta 2)}$$

Nota : il faut simplement être un peu ordonné et prendre le bon outil !!!

3.APPLICATION

Reprenons notre exemple de départ :

Soient deux tensions :

$$V1(t) = 220\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$$

$$V2(t) = 110\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

Où **110 V** et **220 V** sont les tensions efficaces et $\boldsymbol{\pi/3}$ (60°) et $\boldsymbol{\pi/6}$ (30°) sont les déphasages des tensions **V1(t)** et **V2(t)** par rapport à un signal de référence débutant à 0.

On souhaite effectuer la somme V1(t) + V2(t) et déterminer son déphasage θ

On connaît les modules et arguments des deux tensions complexes $\underline{V}_1$ et $\underline{V}_2$.

Sans faire de calcul on peut écrire directement :

$$\underline{V}_1 = 220.e^{j\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad \underline{V}_2 = 110.e^{j\frac{\pi}{6}}$$

On veut faire la somme des deux tensions. Il faut donc passer de l'écriture sous la forme exponentielle à une écriture sous la forme algébrique.

$\underline{V}_1$ = 220.[cos($\frac{\pi}{3}$) + j.sin($\frac{\pi}{3}$)] = 220.[0,5 + 0,866.j] = 110 + 190,5j

$\underline{V}_2$ = 110.[cos($\frac{\pi}{6}$) + j.sin($\frac{\pi}{6}$)] = 110.[0,866 + 0,5.j] = 95,3 + 55j

$\underline{V}_1$ + $\underline{V}_2$ = 110 + 190,5j + 95,3 + 55j = (110 + 95,3) + (190,5 + 55).j = 205,3 + 245,5j

On connaît désormais l'écriture sous la forme algébrique de la somme **$\underline{V}_1$ + $\underline{V}_2$**

Il nous reste plus qu'à déterminer le module et l'argument de cette somme complexe :

$$\textbf{Module :} \left|\underline{V}_1 + \underline{V}_2\right| = \sqrt{205,3^2 + 245,5^2} = 320\ Volts$$

$$\textbf{Argument } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{245,5}{205,3}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{245,5}{320}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{205,3}{320}\right) = 0,873\ Rad\ soit\ environ\ 50°$$

D'où au final

$$V1(t) + V2(t) = 320\sqrt{2}\sin(\omega t + 0,873)$$

De plus, sur le chronogramme du début, la tension V1(t) + V2(t) passe par un maximum de :

$320\sqrt{2}$ Volts soit 452 Volts

Nota : ceci est un exemple, mais on peut traiter beaucoup d'autres problèmes avec les complexes

4.Exercices

Exercice 1 :

Soient les nombres complexes suivants :

$\underline{Z}1 = 4 + 5j$ $\underline{Z}2 = 2 + 3j$

Calculer les modules et arguments pour :

$\underline{Z}1 + \underline{Z}2$ $\underline{Z}1 - \underline{Z}2$ $\underline{Z}1 \times \underline{Z}2$ $\underline{Z}1 : \underline{Z}2$

Exercice 2 :

Soient deux tensions :

$V1(t) = 48\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$ $V2(t) = 24\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$

Déterminer le module et l'argument de la somme de ces deux tensions.