Analyse harmonique — Exercice 1

Impédance complexe

$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C = R + \frac{1}{jC\omega} = R - j\frac{1}{C\omega} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}e^{j(-\arctan(\frac{1}{RC\omega}))}$

Application numérique

$\underline{Z} = 10^3 - j\frac{1}{100 \times 10^{-9} \times 2\pi \times 10^3} = 10^3 - j\frac{10^4}{2\pi} = 10^3 + j(-1591)$

Courant

Loi d'Ohm aux bornes du groupement : $\underline{I} = \underline{U} / \underline{Z}$

$\underline{I} = \frac{10\sqrt{2}}{R - j\frac{1}{C\omega}} = \frac{10\sqrt{2}R + j\frac{10\sqrt{2}}{C\omega}}{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} = \frac{10\sqrt{2}RC^2\omega^2}{1 + R^2C^2\omega^2} + j\frac{10\sqrt{2}C\omega}{1 + R^2C^2\omega^2}$

$|\ \underline{I}\ | = \sqrt{\mathfrak{Re}^2 + \mathfrak{Im}^2} = \sqrt{\frac{(10\sqrt{2}RC^2\omega^2)^2 + (10\sqrt{2}C\omega)^2}{(1 + R^2C^2\omega^2)^2}} =$
$\frac{\sqrt{200R^2C^4\omega^4 + 200C^2\omega^2}}{1 + R^2C^2\omega^2} = \frac{\sqrt{200C^2\omega^2(1 + R^2C^2\omega^2)}}{1 + R^2C^2\omega^2} = \frac{C\omega\sqrt{200}}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}} =$
$C\omega\sqrt{\frac{200}{1 + R^2C^2\omega^2}}$

$\arg(\ \underline{I}\ ) = \arctan(\frac{\mathfrak{Im}}{\mathfrak{Re}}) = \arctan(\frac{1}{RC\omega})$

$\underline{I} = C\omega\sqrt{\frac{200}{1 + R^2C^2\omega^2}}e^{j\arctan(\frac{1}{RC\omega})}$

Application numérique

$\underline{I} = 4 \times 10^{-3} + j6,37 \times 10^{-3}$

$|\ \underline{I}\ | = 7,52 \times 10^{-3}$ mA

$\arg(\ \underline{I}\ ) = 1,0098$ rad

Le courant $\underline{I}$ dans le circuit est **en avance de phase** par rapport à la tension $\underline{U}$.

$I_{eff} = \frac{7,52 \times 10^{-3}}{\sqrt{2}}$ = 5,3 mA

Tensions

Loi d'Ohm aux bornes du condensateur : $\underline{U}_C = \underline{Z}_C.\ \underline{I}_C = \underline{Z}_C\ .\ \underline{I} = \frac{1}{jC\omega}\ \underline{I} = \frac{-j}{C\omega}\ \underline{I} = \frac{1}{C\omega}e^{j(-\frac{\pi}{2})}\ \underline{I}$

$\underline{U}_C = \frac{1}{C\omega}C\omega\sqrt{\frac{200}{1 + R^2C^2\omega^2}}e^{j(-\frac{\pi}{2}+\arctan(\frac{1}{RC\omega}))} = \sqrt{\frac{200}{1 + R^2C^2\omega^2}}e^{j(-\frac{\pi}{2}+\arctan(\frac{1}{RC\omega}))}$

Loi d'Ohm aux bornes de la résistance : $\underline{U}_R = \underline{Z}_R.\ \underline{I}_C = \underline{Z}_R.\ \underline{I} = R.\ \underline{I}$

$\underline{U}_R = RC\omega\sqrt{\frac{200}{1 + R^2C^2\omega^2}}e^{j\arctan(\frac{1}{RC\omega})}$

Application numérique

$|\ \underline{U}_C\ |$ = 11,97 V

$U_{Ceff} = \frac{11,97}{\sqrt{2}}$ = 8,46 V

$\arg(\ \underline{U}_C\ )$ = -0,56 rad

La tension $\underline{U}_C$ est **en retard de phase** par rapport à $\underline{U}$ et **en quadrature de phase** par rapport au courant $\underline{I}$.

$|\ \underline{U}_R\ |$ = 7,52 V

$U_{Reff} = \frac{7,52}{\sqrt{2}}$ = 5,32 V

$\arg(\ \underline{U}_R\ )$ = 1,0098 rad

La tension $\underline{U}_R$ est **en avance de phase** par rapport à $\underline{U}$, et **en phase** avec le courant $\underline{I}$.