

# CiTISE S1 : Division euclidienne de deux polynômes

Licini Franck

Télécom Saint-Etienne

16 novembre 2021

Quelques rappels sur la division des entiers naturels.

### Théorème (Division euclidienne dans $\mathbb{N}$ )

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels tels que  $b \neq 0$ . Il existe un unique couple  $(q; r)$  d'entiers naturels tels que :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

L'entier  $q$  s'appelle le **quotient** et  $r$  le **reste** de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .

### Remarque

Si  $a < b$  alors  $q = 0$  et  $r = a$ .

### Remarque

Si  $r = 0$  alors  $a = bq$  et on dit que  $a$  est un **multiple** de  $b$  ou encore que  $a$  est **divisible** par  $b$ .

### Théorème (Division euclidienne ou division selon les puissances décroissantes)

Soit  $A(X)$  et  $B(X)$  deux polynômes tels que  $B(X)$  ne soit pas le polynôme nul. Il existe un unique couple  $(Q(X); R(X))$  de polynômes tels que :

$$\begin{cases} A(X) = B(X)Q(X) + R(X) \\ \deg(R(X)) < \deg(B(X)) \end{cases}$$

Le polynôme  $Q(X)$  s'appelle le **quotient** et  $R(X)$  le **reste** de la division euclidienne de  $A(X)$  par  $B(X)$ .

#### Remarque

Si  $\deg(A(X)) < \deg(B(X))$  alors  $Q(X) = 0$  et  $R(X) = A(X)$ .

#### Remarque

Si  $R(X) = 0$  alors  $A(X) = Q(X)B(X)$ . Dans ce cas, on dit que  $A(X)$  est un **multiple** de  $B(X)$  ou encore que  $A(X)$  est **divisible** par  $B(X)$ .

## Exemple (1)

Prenons  $A(X) = X^4 - X^3 + X - 1$  et  $B(X) = X - 1$ . Il existe  $Q(X)$  et  $R(X)$  tels que  $\deg(R(X)) < \deg(B(X))$  et

$$X^4 - X^3 + X - 1 = (X - 1)Q(X) + R(X)$$

Nous allons déterminer les polynômes  $Q(X)$  et  $R(X)$ .

## Exemple (1)

- On a  $\deg(R(X)) < 1$  donc le polynôme  $R(X)$  est constant. Il existe une constante  $r$  telle que  $R(X) = r$ . On a donc

$$X^4 - X^3 + X - 1 = (X - 1)Q(X) + r$$

**A partir de cette égalité polynomiale, on peut obtenir une égalité numérique en évaluant en une valeur complexe.** Nous allons choisir d'évaluer en 1, ce qui annule  $X - 1$  et donne

$$1^4 - 1^3 + 1 - 1 = (1 - 1)Q(1) + r \Leftrightarrow 0 = r$$

On a donc démontré que  $R(X) = 0$  et

$$X^4 - X^3 + X - 1 = (X - 1)Q(X)$$

## Exemple (1)

- L'étude des degrés dans l'égalité  $X^4 - X^3 + X - 1 = (X - 1)Q(X)$  donne  $\deg(Q(X)) = 3$ . Il existe donc  $a, b, c$  et  $d$  constantes telles que  $Q(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ . D'où

$$X^4 - X^3 + X - 1 = (X - 1)(aX^3 + bX^2 + cX + d)$$

En développant le second membre on obtient.

$$X^4 - X^3 + X - 1 = aX^4 + (b - a)X^3 + (c - b)X^2 + (d - c)X - d$$

Une identification donne le système linéaire suivant

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -1 \\ c - b = 0 \\ d - c = 1 \\ -d = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

On a donc démontré que  $Q(X) = X^3 + 1$  et on conclut

$$X^4 - X^3 + X - 1 = (X - 1)(X^3 + 1)$$

## Exemple (1)

- La méthode précédente peut toujours être envisagée pour déterminer le reste et le quotient d'une division euclidienne de deux polynômes mais elle peut vite donner des calculs fastidieux. En effet, lorsque le reste n'est pas constant, une seule évaluation ne suffira pas. D'autre part l'identification utilisée pour déterminer le quotient peut donner un système linéaire bien plus compliqué à résoudre.
- On peut contourner ces difficultés avec une technique opératoire utilisant la "potence". Cette technique est semblable à celle utilisée pour la division de deux entiers. Dans l'exemple qui nous intéresse cela donne.

$$\begin{array}{r|l}
 X^4 - X^3 & + X - 1 \\
 - (X^4 - X^3 & ) \\
 \hline
 & X - 1 \\
 - ( & X - 1) \\
 \hline
 & 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 X - 1 \\
 \hline
 X^3 + 1
 \end{array}$$

Pour expliquer cette méthode, reprenons le vocabulaire de la division. Le polynôme  $X^4 - X^3 + X - 1$  est le dividende,  $X - 1$  est le diviseur,  $X^3 + 1$  est le quotient et 0 est le reste.

## Exemple (1)

- On écrit le dividende et le diviseur selon les **puissances décroissantes** (la division euclidienne de deux polynômes est aussi appelé **division selon les puissances décroissantes**). Dans le dividende, s'il "manque" certaines puissances, on laisse la place correspondante. Dans notre exemple, c'est le cas pour  $X^2$ .

$$\begin{array}{r|l} X^4 - X^3 & + X - 1 \\ \hline & X - 1 \end{array}$$

- On raisonne avec les termes de plus haut degrés pour obtenir le terme plus haut degré du quotient. Dans notre exemple, le terme de plus haut degré du dividende est  $X^4$  et celui du diviseur est  $X$  donc le terme du plus haut degré du quotient est  $X^3$  car  $X^3 \cdot X = X^4$ .

$$\begin{array}{r|l} X^4 - X^3 & + X - 1 \\ \hline X^3 & \end{array}$$

## Exemple (1)

- On soustrait au dividende le produit du terme obtenu dans le quotient avec le diviseur. Dans notre exemple, on soustrait donc  $X^3 \cdot (X - 1) = X^4 - X^3$ .

$$\begin{array}{r|l}
 X^4 - X^3 & + X - 1 \\
 - (X^4 - X^3) & \\
 \hline
 & X - 1 \\
 \hline
 & X - 1
 \end{array}$$

- On recommence en raisonnant avec les termes de plus haut degrés.

$$\begin{array}{r|l}
 X^4 - X^3 & + X - 1 \\
 - (X^4 - X^3) & \\
 \hline
 & X - 1 \\
 \hline
 & X - 1
 \end{array}$$

Et ainsi de suite jusqu'à obtenir le reste de la division.

$$\begin{array}{r|l}
 X^4 - X^3 & + X - 1 \\
 - (X^4 - X^3) & \\
 \hline
 & X - 1 \\
 - ( & X - 1) \\
 \hline
 & 0
 \end{array}$$

## Exemple (2)

- C'est à vous !

Traitez l'exemple 12 du cours en effectuant la division euclidienne de  $A(X) = 2X^4 - X^2 + 3X + 1$  par  $B(X) = X^2 + X + 1$ .