Chapitre 5 : Nombres complexes et trigonométrie

F. LICINI

franck.licini@telecom-st-etienne.fr

Rappelons que l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un ensemble dans lequel se prolongent les règles opératoires de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et possédant un élément j tel que $j^2 = -1$

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On rappelle que pour tout point M du cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1, si θ est une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ alors l'abscisse de M est le cosinus de θ, noté $\cos(\theta)$ et l'ordonnée de M est le sinus de θ, noté $\sin(\theta)$.

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

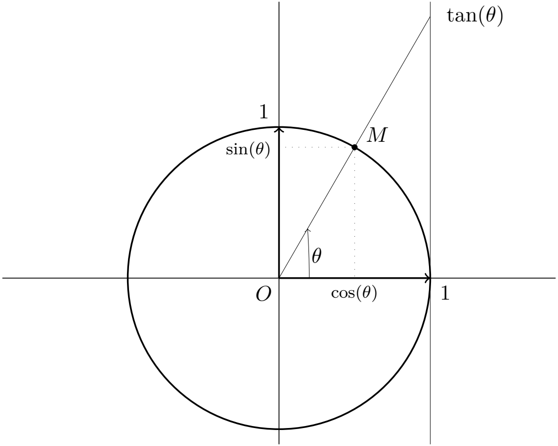

Figure – Définition des fonctions trigonométriques circulaires

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit $z = a + jb$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, un nombre complexe non nul et $M(z)$ le point d'**affixe** z, c'est-à-dire le point du plan dont les coordonnées cartésiennes sont (a, b). Les **coordonnées polaires** du point $M(z)$ sont $[r, \theta]$ où $r = OM$ et θ est une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

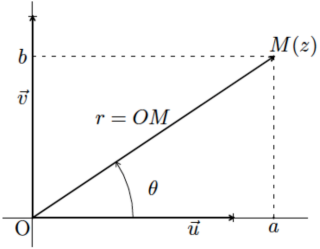

Figure – Module et argument d'un nombre complexe non nul

Théorème 1 (*Forme trigonométrique*)

Tout nombre complexe z non nul admet une écriture de la forme $z = r(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$ où r est un nombre réel strictement positif.

Exemple 1

Déterminer la forme trigonométrique de $z = 1 + j$.

Définition 1 (*Fonction tangente*)

Pour tout nombre réel θ tel que $\cos(\theta) \neq 0$, on définit la tangente de θ par

$$\boxed{\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}$$

Remarque 1

Le domaine de définition de la fonction tangente est $\mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exemple 2

Calculer $\tan(0)$, $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ *et* $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Théorème 2 (*Lien entre forme algébrique et forme trigonométrique*)

Si $z = r\left(\cos(\theta) + j\sin(\theta)\right)$ *est l'écriture trigonométrique et* $z = a + jb$ *l'écriture algébrique d'un nombre complexe non nul alors :*

$$\boxed{r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{a}{r} \quad \textit{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{r}}$$

Si $a \neq 0$ *alors*

$$\boxed{\tan(\theta) = \frac{b}{a}}$$

Démonstration :

Remarque 2

Soit $z =$ un nombre complexe non nul. Il existe $r \in]0; +\infty[$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$z = r\left(\cos\theta + j\sin\theta\right)$$

Le nombre $r = |z|$ est unique mais le nombre θ est défini modulo 2π. Toute valeur de θ convenant est appelée un ***argument*** *de z. Ainsi, θ' est un autre argument de z si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + 2k\pi$ On note*

$$\boxed{\arg(z) = \theta \bmod 2\pi}$$

Parmi tous les arguments, celui appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ est appelé ***argument principal****.*

Notation 1

A la place de noter $\arg(z) = \theta \mod 2\pi$*, on peut utiliser écrire* $\arg(z) = \theta \quad [2\pi]$ *ou encore* $\arg(z) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Exemple 3

Déterminer l'argument principal de 1, j *et* -1.
Déterminer l'argument principal d'un nombre réel strictement positif, d'un nombre réel strictement négatif.

Théorème 3

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. On a

$$\boxed{z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') \mod 2\pi \end{cases}}$$

Théorème 4 (*Propriétés de l'argument*)

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $\boxed{\arg\left(\bar{z}\right) = -\arg(z) \bmod 2\pi}$
- $\boxed{\arg\left(zz'\right) = \arg(z) + \arg(z') \bmod 2\pi}$
- $\boxed{\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg\left(z\right) \bmod 2\pi}$
- $\boxed{\arg\left(z^n\right) = n\arg(z) \bmod 2\pi, \quad \forall n \in \mathbb{Z}}$
- $\boxed{\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg\left(z'\right) - \arg(z) \bmod 2\pi}$

■

Démonstration :

Corollaire 1

Pour tout nombre complexe z non nul

$$\boxed{\arg(-z) = \arg(z) + \pi \mod 2\pi}$$

$$\boxed{\arg(jz) = \arg(z) + \frac{\pi}{2} \mod 2\pi}$$

Démonstration :

Notation 2 (*Notation d'Euler*)

Pour tout nombre réel θ, on note

$$\boxed{e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)}$$

Ainsi, tout nombre complexe non nul admet une écriture exponentielle de la forme $z = re^{j\theta}$ avec $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta \bmod 2\pi$

Remarque 3

D'après les propriétés de l'argument d'un nombre complexe non nul, pour tous nombres réels θ et θ'

$$\boxed{e^{j\theta} e^{j\theta'} = e^{j(\theta+\theta')}}$$

$$\boxed{\frac{1}{e^{j\theta}} = \overline{e^{j\theta}} = e^{-j\theta}}$$

$$\boxed{\frac{e^{j\theta}}{e^{j\theta'}} = e^{j(\theta-\theta')}}$$

$$\boxed{\left(e^{j\theta}\right)^n = e^{jn\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}}$$

Notation 3

L'ensemble $\mathbb{U} = \left\{e^{j\theta}, \theta \in \mathbb{R}\right\}$ *est l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1. Il correspond au cercle du plan, de centre O et rayon 1.*

Exemple 4

Calculer e^{j0}, $e^{j\frac{\pi}{2}}$ *et* $e^{j\pi}$

Théorème 5 (*Formule de Moivre*)

Pour tout nombre réel θ *et tout entier* $n \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{(\cos(\theta) + j\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)}$$

Exemple 5

Développer $(\cos(x) + j\sin(x))^3$ *et en déduire une expression de* $\cos(3x)$ *en fonction de* $\cos(x)$.

Théorème 6 (*Règles de calcul et forme exponentielle*)

Si $z = r(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$ *et* $z' = r'(\cos(\theta') + j\sin(\theta'))$ *sont les écritures trigonométriques de deux nombres complexes non nuls alors* $z = re^{j\theta}$ *et* $z' = r'e^{j\theta'}$*. De plus :*

- $zz' = re^{j\theta}r'e^{j\theta'} = rr'e^{j(\theta+\theta')}$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{j\theta}} = \frac{1}{r}e^{-j\theta}$
- $z^n = \left(re^{j\theta}\right)^n = r^n e^{jn\theta}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$
- $\frac{z'}{z} = \frac{r'e^{j\theta'}}{re^{j\theta}} = \frac{r'}{r}e^{j(\theta'-\theta)}$
- $\overline{z} = \overline{re^{j\theta}} = re^{-j\theta}$
- $-z = -re^{j\theta} = re^{j(\theta+\pi)}$
- $jz = e^{j\frac{\pi}{2}}re^{j\theta} = re^{j\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$

Exemple 6

Calculer l'inverse de $z = 1 + j$ *en utilisant sa forme exponentielle.*

Théorème 7 (*Formules d'Euler*)

Pour tout nombre réel θ

- $$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}}$$
- $$\boxed{\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}}$$

■

Démonstration :

Théorème 8 (*Factorisation d'une somme d'exponentielles complexe*

Pour tous réels θ_1 et θ_2, on a :

- $$\boxed{e^{j\theta_1} + e^{j\theta_2} = 2\cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{j\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}}$$
- $$\boxed{e^{j\theta_1} - e^{j\theta_2} = 2j\sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{j\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}}$$

■

Démonstration :

Exemple 7

Déterminer la forme exponentielle de $z = e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{j\frac{\pi}{2}}$.

Exemple 8

Déterminer la forme exponentielle de $z = 1 - e^{j\frac{4\pi}{3}}$.

L'objet de ce paragraphe est la résolution de l'équation $z^n = A$, d'inconnue complexe z (A étant un nombre complexe donné). Les solutions de cette équation sont appelées **racines** $n^{\text{\textbf{ième}}}$ de A.
Le cas particulier $n = 2$ (racines carrées) est le plus couramment utilisé et a déjà été présenté dans le chapitre 3 .

Théorème 9 (*Racines $n^{ième}$ d'un nombre complexe*)

Soit n un entier naturel non nul.
Tout nombre complexe A non nul admet exactement n racines $n^{ième}$. Si $A = Re^{j\phi}$ $(R > 0)$ alors ses racines $n^{ième}$ sont

$$\boxed{z = R^{\frac{1}{n}}\, e^{j\left(\frac{\phi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \textit{avec } k \in \{0; 1; \ldots ; n-1\}}$$

■

Démonstration :

Remarque 4

Ce résultat général permet de retrouver celui donné dans le cas des racines carrées d'un nombre complexe non nul. En effet, un nombre complexe non nul $A = Re^{j\phi}$ *(*$A > 0$*) admet donc exactement deux racines carrées qui sont opposées.*

$$\sqrt{R}\, e^{j\frac{\phi}{2}} \quad \text{et} \quad \sqrt{R}\, e^{j\left(\frac{\phi}{2}+\pi\right)} = -\sqrt{R}\, e^{j\frac{\phi}{2}}$$

- *Si* A *est un réel positif, ses racines carrées sont* $\sqrt{A}$ *et* $-\sqrt{A}$.
- *Si* A *est un réel négatif, ses racines carrées sont* $j\sqrt{-A}$ *et* $-j\sqrt{-A}$.

Exemple 9 (*Racines carrées de l'unité*)

Déterminer les racines carrées de 1.

Exemple 10 (*Racines cubiques de l'unité*)

Déterminer les racines cubiques de 1.

Théorème 10 (*Formules d'égalités*)

- $$\cos(u) = \cos(v) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 2k\pi \\ ou \\ u = -v + 2k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
- $$\sin(u) = \sin(v) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 2k\pi \\ ou \\ u = \pi - v + 2k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
- $$\tan(u) = \tan(v) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Remarque 5

Dans le cas où l'on veut résoudre une équation du type $\cos(u) = \sin(v)$, *on peut utiliser* $\sin(v) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ *ou* $\cos(u) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ *pour se ramener à l'un des résultats précédents.*

La suite de ce paragraphe donne une liste non exhaustive de formules trigonométriques. Il n'est pas nécessaire de toutes les retenir par coeur, mais il faut connaître leur existence et leur forme, *savoir les retrouver rapidement* en utilisant les nombres complexes.

Théorème 11

Pour tout réel x

$$\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1}$$

Théorème 12 (*Formules d'addition*)

Pour tous réels a et b tels que les expressions indiquées aient un sens, on a :

- $\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$
- $\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$
- $\boxed{\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}}$
- $\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b}$
- $\boxed{\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b}$
- $\boxed{\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}}$

Remarque 6

En particulier, pour tout réel x tel que les expressions indiquées aient un sens, on a les formules de duplication :

- $$\boxed{\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)}$$
- $$\boxed{\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)}$$
- $$\boxed{\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}}$$

Théorème 13 (*Transformation de produits en somme (linéarisation*)

Pour tous réels a et b, on a :

- $\boxed{\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)}$
- $\boxed{\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)}$
- $\boxed{\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)}$

Remarque 7

En particulier, pour tout réel x

- $$\boxed{\cos^2(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2x)\right)}$$
- $$\boxed{\sin^2(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2x)\right)}$$

Ces formules de linéarisation peuvent être retrouvées à l'aide des formules d'Euler et de la formule du binôme de Newton.

Exemple 11

Linéariser $\cos^3(x)$.

Théorème 14 (*Transformation de sommes en produits (factorisatio*

Pour tous réels p et q, on a :

- $$\boxed{\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$
- $$\boxed{\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$
- $$\boxed{\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$
- $$\boxed{\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

Théorème 15 (*Réduction de $a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$*)

Soit a et b deux réels non nuls et ω un réel strictement positif. On a pour tout réel t

$$\boxed{a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t) = A\sin\left(\omega t + \varphi\right)}$$

où $|a + jb| = A$ *et* $\arg\left(a + jb\right) = \varphi \mod 2\pi.$ ■

Démonstration :

Remarque 8

$A = \sqrt{a^2 + b^2}$. *De plus* $a = A\cos(\varphi)$ *et* $b = A\sin(\varphi)$ *donc si* $a \neq 0$ *alors* $\tan(\varphi) = \dfrac{b}{a}$.

Exemple 12

Réduire $f(t) = \sin(\omega t) + \sqrt{3}\cos(\omega t)$