Chapitre 9 : Limites et continuité

F. LICINI

franck.licini@telecom-st-etienne.fr

On rappelle que l'on a défini, dans le chapitre sur les suites, la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, pour laquelle on a étendu la notion d'ordre de $\mathbb{R}$ et défini des règles opératoires.

Définition 1 (*Adhérence d'une partie de $\mathbb{R}$*)

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que a appartient à l'adhérence de $\mathcal{D}$ si pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de a, $\mathcal{V} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$.

Remarque 1

On peut démontrer que a *appartient à l'adhérence de* $\mathcal{D}$ *si et seulement s'il existe une suite à valeurs dans* $\mathcal{D}$ *de limite* a*.*

Remarque 2

Si $\mathcal{D}$ *est un intervalle alors* a *appartient à l'adhérence de* $\mathcal{D}$ *s'il est un élément de* $\mathcal{D}$ *ou une des extrémités de* $\mathcal{D}$*.*

Exemple 1

Donner l'adhérence des intervalles $]0;1]$ *et* $]0;+\infty[$*.*

Nous allons commencer par une définition générale de la limite d'une fonction.

Définition 2 (*Limite d'une fonction*)

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{D}$ *une partie de* $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *dans l'adhérence de* $\mathcal{D}$ *et* $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *une fonction définie sur* $\mathcal{D}$. *On dit que* f *admet* ℓ *pour limite en* a *si*

> *Pour tout voisinage* $\mathcal{V}_\ell$ *de* ℓ, *il existe un voisinage* $\mathcal{V}_a$ *de* a *tel que, pour tout* $x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{V}_a$, $f(x) \in \mathcal{V}_\ell$

Dans ce cas, on dit aussi que $f(x)$ *tend vers* ℓ *quand* x *tend vers* a.

Théorème 1 (*Unicité de la limite*)

Avec les notations précédente, si ℓ existe alors ℓ est unique. On dit que ℓ est la limite de la fonction f en a.

Notation 1

Dans ce cas, on dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a.
On note alors $\lim_a f = \ell$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ ou encore $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Limite d'une fonction.

Remarque 3

Dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to a} |f(x) - \ell| = 0$$

Remarque 4

Dans le cas particulier où f est définie en a, si f admet une limite ℓ en a alors $\ell = f(a)$.

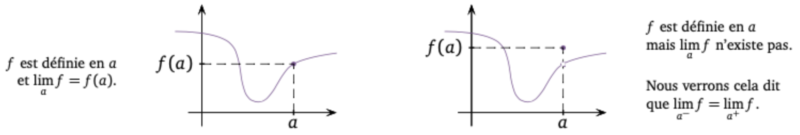


Figure – Limite en a d'une fonction définie en a

Remarque 5

Il existe une autre définition de la limite d'une fonction (appelée "limite épointée") donnant un résultat différent dans le deuxième cas de la figure précédente mais nous n'utiliserons pas cette définition dans ce cours, conformément aux programmes de classes préparatoires.

Théorème 2

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ dans l'adhérence de $\mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathcal{D}$. Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Définition 3 (*Limite à gauche, à droite*)

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathcal{D}$.
Si $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est dans l'adhérence de $\mathcal{D} \cap]-\infty; a[$, on dit que f admet ℓ pour limite à gauche en a si la restriction de f à $\mathcal{D} \cap]-\infty; a[$ admet ℓ pour limite en a. On note alors $\lim\limits_{a^-} f = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell$.
De même, si a est dans l'adhérence de $\mathcal{D} \cap]a; +\infty[$, on dit que f admet admet ℓ pour limite à droite en a si la restriction de f à $\mathcal{D} \cap]a; +\infty[$ admet ℓ pour limite en a. On note alors $\lim\limits_{a^+} f = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell$.

Remarque 6

Si la fonction f admet des limites à gauche et à droite en a qui sont différentes alors on dit que f admet une ***discontinuité de première espèce****.*

Exemple 2

Etudions les limites à gauche et à droite en 0 de la fonction $\mathbb{1}_{[0;+\infty[}$.

Théorème 3 (*Caractérisation de la limite à l'aide des limites à gau*

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathcal{D}$.
Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ dans l'adhérence de $\mathcal{D} \cap]-\infty; a[$ et l'adhérence de $\mathcal{D} \cap]a; +\infty[$.

- *Si f est définie en a :*
  $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$ *et* $f(a) = \ell$.
- *Si f n'est pas définie en a :*
  $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$.

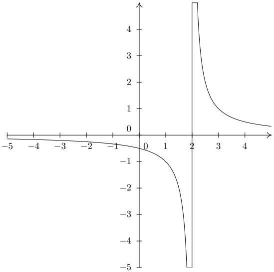
Dans ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthogonal et on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

Définition 4 (*Asymptote verticale*)

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ dans l'adhérence de $\mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathcal{D}$. On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$ si f admet une limite à gauche ou à droite en a qui est infinie.

Exemple 3

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \frac{1}{x-2}$ *admet la droite d'équation* $x = 2$ *pour asymptote verticale.*

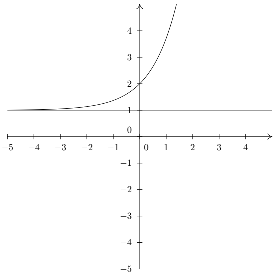


Définition 5 (*Asymptote horizontale*)

Soit $b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ telle que $+\infty$ est dans l'adhérence de $\mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathcal{D}$. On dit que la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$.
On définit de même la notion d'asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

Exemple 4

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \mathrm{e}^x + 1$ *admet la droite d'équation* $y = 1$ *pour asymptote horizontale en* $-\infty$.



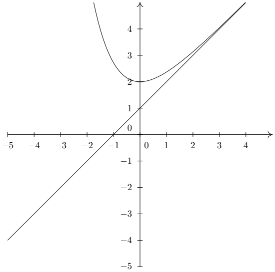
Définition 6 (*Asymptote oblique*)

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ telle que $+\infty$ est dans l'adhérence de $\mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathcal{D}$. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

On définit de même la notion d'asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

Exemple 5

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + x + 1$ *admet la droite d'équation* $y = x + 1$ *pour asymptote oblique en* $+\infty$.



Théorème 4 (*Caractérisation séquentielle de la limite*)

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{D}$ *une partie de* $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *dans l'adhérence de* $\mathcal{D}$ *et* $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *une fonction définie sur* $\mathcal{D}$.

La fonction f *admet* ℓ *pour limite en* a *si et seulement si pour toute suite* (u_n) *à valeurs dans* $\mathcal{D}$, *convergente de limite* a, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$.

Remarque 7

Avec les notations du théorème précédent, s'il existe une suite (u_n) *à valeurs dans* $\mathcal{D}$*, convergente de limite* a *telle que la suite* $(f(u_n))$ *ne soit pas convergente alors la fonction* f *n'admet pas de limite en* a*.*
De même, s'il existe deux suites (u_n) *et* (v_n) *à valeurs dans* $\mathcal{D}$*, convergentes de limite* a *telles que les deux suites* $(f(u_n))$ *et* $(f(v_n))$ *soient convergentes mais de limites différentes alors la fonction* f *n'admet pas de limite en* a*.*

Exemple 6

Montrons que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ *n'admet pas de limite en 0.*

Exemple 7

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par* $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. *Montrons que* f *n'admet pas de limite en* 0.

La caractérisation séquentielle de la limite permet de démontrer facilement des résultats analogues à ceux obtenus pour le suites. C'est-à-dire qu'il se passe la même chose qu'avec les suites pour les opérations de somme, produit, inverse, quotient. On retiendra à nouveau les cas de formes indéterminées $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$.

Complétons ce résultat par un résultat sur la composition des limites qui se démontre facilement à partir de la définition générale d'une limite. Une démonstration détaillée d'une version "adaptée" à la continuité sera faite dans la suite du cours.

Théorème 5 (*Composition des limites*)

Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ deux parties de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ et $g : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ deux fonctions respectivement définies sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ dans l'adhérence de $\mathcal{D}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ dans l'adhérence de $\mathcal{E}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \ell$ alors

$$\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = \lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y) = \ell$$

La caractérisation séquentielle des limites permet facilement d'établir des résultats analogues à ceux obtenus pour les suites.

Théorème 6 (*Passage à la limite pour une inégalité*)

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ dans l'adhérence de $\mathcal{D}$. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que

$$\forall x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{V}, f(x) \leq g(x)$$

Si f et g admettent des limites en a alors

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

Remarque 8

Attention, le résultat est en général faux pour des inégalités strictes.

Théorème 7 (*Limite par comparaison*)

Soit $\mathcal{D}$ *une partie de* $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *dans l'adhérence de* $\mathcal{D}$. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur* $\mathcal{D}$ *à valeurs réelles. On suppose qu'il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* a *tel que*

$$\forall x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{V}, f(x) \leq g(x)$$

- *Si* $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ *alors* $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$
- *Si* $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$ *alors* $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Théorème 8 (*Limite par encadrement - Théorème des gendarmes*)

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ dans l'adhérence de $\mathcal{D}$. Soient f, g et h des fonctions définies sur $\mathcal{D}$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que

$$\forall x \in \mathcal{V} \cap \mathcal{D}, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x)$ alors g admet une limite en a et

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x)$$

Théorème 9 (*Théorème de la limite monotone*)

Si f est une fonction définie et monotone sur un intervalle I alors la fonction admet une limite à gauche et à droite en tout point en lequel cela a un sens.

Plus précisément, dans le cas où f est croissante sur I, si on note a la borne inférieur de I ($a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$) et b sa borne supérieur ($b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$) alors la fonction f admet une limite à gauche en b, qui est finie si f est majorée, $+\infty$ sinon, la fonction f admet une limite à droite en a, qui est finie si f est minorée, $-\infty$ sinon et en tout point $c \in]a; b[$, la fonction f admet une limite à gauche et à droite telles que

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \leqslant f(c) \leq \lim_{x \to c^+} f(x)$$

Le résultat est analogue pour une fonction décroissante. Il convient alors d'inverser le sens des inégalités et d'échanger « minorée » et « majorée » ainsi que « $+\infty$ » et « $-\infty$ ».

Définition 7 (*Fonction continue en un point*)

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathcal{D}$. La fonction f est dite continue en a si f admet une limite en a. On a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Remarque 9

Si f est continue en a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, *ce qui peut aussi s'écrire*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon}$$

Continuité.

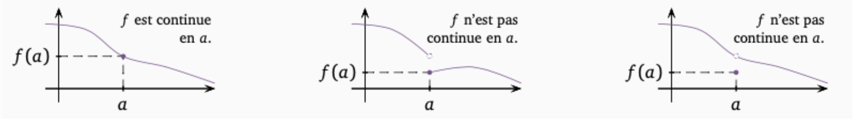


Figure – Continuité d'une fonction : différents cas de figure

Théorème 10 (*Caractérisation avec les limites à gauche et à droite*

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, a un réel à l'intérieur de $\mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathcal{D}$. La fonction f est continue en a si et seulement si f admet des limites à gauche et à droite en a et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Exemple 8

La fonction $\mathbb{1}_{[0;+\infty[}$ *n'est pas continue en 0.*

Propriété 1 (*Prolongement par continuité d'une fonction*)

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \backslash \mathcal{D}$ dans l'adhérence de $\mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathcal{D}$.
Si f admet une limite finie ℓ en a alors la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathcal{D} \cup \{a\}$ par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \neq a$ et $\tilde{f}(a) = \ell$ est continue en a.

Remarque 10

Avec les notations de la propriété précédente, on dit que $\tilde{f}$ est le ***prolongement par continuité*** *en a de la fonction f.*

Exemple 9

Déterminons le prolongement par continuité en 0 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$.

La caractérisation séquentielle d'une limite permet d'établir le résultat suivant.

Théorème 11 (*Caractérisation séquentielle de la continuité*)

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathcal{D}$.

La fonction f est continue en a si et seulement si, pour tout suite (u_n) à valeurs dans $\mathcal{D}$ et convergente de limite a, la suite $(f(u_n))$ est convergente de limite $f(a)$.

De ce résultat résulte des propriétés semblables à celles établies pour les suites.

Théorème 12

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}$. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$, à valeurs réelles. Si f et g sont continues en a alors $f+g$ et fg sont continues en a. De plus, si $f(a) \neq 0$ alors $\dfrac{1}{f}$ et $\dfrac{g}{f}$ sont continues en a.

Définition 8 (*Fonction continue sur $\mathcal{D}$*)

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $\mathcal{D}$. On dit que f est continue sur $\mathcal{D}$ si f est continue en tout point de $\mathcal{D}$.

Remarque 11 (***Un arsenal de fonctions continues***)

Toutes les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine de définition.

- *fonction valeur absolue*
- *fonctions polynomiales*
- *fonctions fractions rationnelles*
- *fonctions puissances*
- *fonctions trigonométriques*
- *fonctions exponentielles*
- *fonctions logarithmes*

Théorème 13 (*Sommes, produit, quotient de fonctions continues*)

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$, à valeurs réelles. Si f et g sont continues sur $\mathcal{D}$ alors $f+g$ et fg sont continues sur $\mathcal{D}$. De plus, si f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$ alors $\dfrac{1}{f}$ et $\dfrac{g}{f}$ sont continues sur $\mathcal{D}$.

Remarque 12

En d'autres termes, la somme, le produit, le quotient de deux fonctions continues est continue.

Reprenons une version du théorème de composition des limites qui est "adaptée" à la continuité.

Théorème 14 (*Limite d'une composée*)

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux parties de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions respectivement définies sur $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, telles que $f(\mathcal{D}_1) \subset \mathcal{D}_2$. Soit a dans l'adhérence de $\mathcal{D}_1$. On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.
Si $\ell \in \mathcal{D}_2$ et g est continue en ℓ alors

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to a} g(f(x)) = \lim_{y \to \ell} g(y) = g(\ell)$$

Théorème 15 (*Composée de deux fonctions continues*)

Soient Soient $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$ *deux parties de* $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathcal{D}_2 \to \mathbb{R}$ *deux fonctions respectivement continues sur* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$, *telles que* $f(\mathcal{D}_1) \subset \mathcal{D}_2$. *La fonction* $g \circ f$ *est continue sur* $\mathcal{D}_1$.

Remarque 13

En d'autres termes, la composée de deux fonctions continues est continue.

Corollaire 1

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue sur $\mathcal{D}$, à valeurs réelles. La fonction $|f|$ est continue sur $\mathcal{D}$.

Exemple 10

La fonction $x \mapsto |\sin(x)|$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

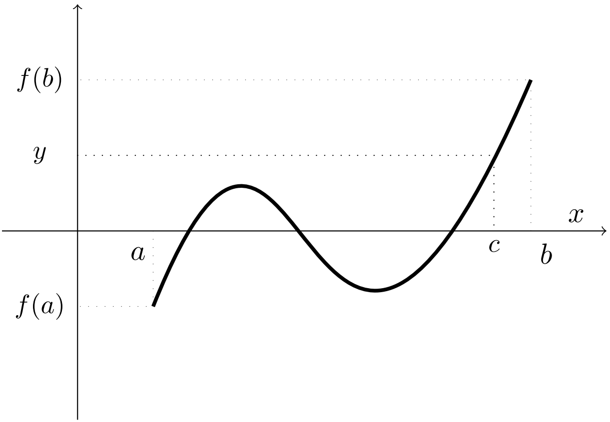


Figure – Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 16 (*Théorème des valeurs intermédiaires*)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Si $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction définie et continue sur $[a; b]$ alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = y$.

Corollaire 2 (*Théorème de Bolzano*)

Soit $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ *une fonction définie et continue sur l'intervalle* $[a; b]$.

$$\boxed{\text{Si } f(a)f(b) < 0 \text{ alors } \exists c \in [a; b] \text{ tel que } f(c) = 0.}$$

Remarque 14

Si f *est bijective alors le réel* c *tel que* $f(c) = 0$ *est unique.*

Exemple 11

Montrons que l'équation $\cos(x) = x$ *admet au moins une solution dans* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Remarque 15

Rappelons une caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$.
Une partie $\mathcal{D}$ *de* $\mathbb{R}$ *est un intervalle si et seulement si pour tous réels* a *et* b *dans* $\mathcal{D}$

$$a \leq b \Rightarrow [a; b] \subset \mathcal{D}$$

En d'autres termes, tout nombre réel compris entre deux éléments de $\mathcal{D}$ *est lui-même élément de* $\mathcal{D}$.

Théorème 17 (*Image d'un intervalle par une fonction continue*)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Attention, ce théorème qui est une autre version du théorème des valeurs intermédiaires dit que si I est un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I alors $f(I)$ est un intervalle, mais pas que I et $f(I)$ sont de même nature. On peut, par exemple, avoir I ouvert et $f(I)$ fermé. On a cependant le résultat suivant.

Théorème 18 (*Image d'un segment par une fonction continue*)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Si $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur $[a; b]$ alors f est bornée sur $[a; b]$ et atteint ses bornes.

Autrement dit, il existe deux réels m et M tels que $f([a; b]) = [m; M]$.

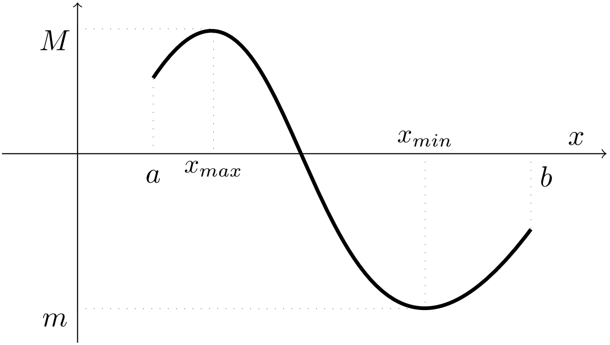


Figure – Image d'un segment par une fonction continue

Remarque 16

Il existe donc deux réels x_{min} et x_{max} dans $[a; b]$ tels que, $\forall x \in I$, $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$.
Le nombre $m = f(x_{min})$ est ***le minimum*** *de f sur $[a; b]$, le nombre $M = f(x_{max})$ est* ***le maximum*** *de f sur $[a; b]$.*

Théorème 19 (***Théorème de la bijection***)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie, continue et strictement monotone sur I.
L'ensemble $J = f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I. La fonction f réalise une bijection de I sur l'intervalle J.
La bijection réciproque de $f^{-1} : J \mapsto I$ est continue et strictement monotone sur J, de même sens de variation que f.

Exemple 12

Montrons que la fonction $f : [0; +\infty[\to [0; +\infty[$ *définie par* $f(x) = x^2$ *est une bijection de* $[0; +\infty[$ *sur* $[0; +\infty[$.

Théorème de la bijection.

Remarque 17

Dans la pratique, pour démontrer qu'une équation $f(x) = y$ *admet au moins une solution dans un intervalle donné, on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. Si on souhaite démontrer que cette équation admet une unique solution alors on pourra utiliser le théorème de la bijection.*

Extension aux fonctions à valeurs complexes.

Dans ce paragraphe, on considère des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction définie sur $\mathcal{D}$.
La fonction f est caractérisée par les deux fonctions $g : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$ et $h : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = g(x) + jh(x)$$

Ces deux fonctions à valeurs réelles sont notées $g = \mathrm{Re}(f)$ et $h = \mathrm{Im}(f)$.

Définition 9 (*Limite d'une fonction à valeurs complexes*)

Soit $\ell \in \mathbb{C}$, $\mathcal{D}$ *une partie de* $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *dans l'adhérence de* $\mathcal{D}$ *et* $f : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{C}$ *une fonction définie sur* $\mathcal{D}$. *On dit que* f *admet* ℓ *pour limite en a si* $\lim\limits_{x \to a} |f(x) - \ell| = 0$. *On écrit alors* $\lim\limits_{a} f = \ell$ *ou* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ *ou encore* $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Définition 10 (*Caractérisation de la limite par les parties réelles et*

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ dans l'adhérence de $\mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction définie sur $\mathcal{D}$. La fonction f admet une limite en a si et seulement si les fonction $Re(f)$ et $Im(f)$ admettent des limites finies en a. Dans ce cas on a

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} Re(f)(x) + j \lim_{x \to a} Im(f)(x)$$

Remarque 18

Autrement dit, $\lim_{a} f = \ell$ *si et seulement si* $\lim_{x \to a} Re(f)(x) = Re(\ell)$ *et* $\lim_{x \to a} Im(f)(x) = Im(\ell)$.

Remarque 19

Attention, il n'y a pas de limite égale à $\pm\infty$ *dans* $\mathbb{C}$ *!*

Exemple 13

Montrons que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{jx}$ *n'admet pas de limite en* $+\infty$.

Définition 11 (*Continuité d'une fonction à valeurs complexes*)

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction définie sur $\mathcal{D}$ et $a \in \mathcal{D}$. On dit que f est continue en a si f admet une limite en a. On a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Remarque 20

Comme pour une fonction à valeurs réelles, si f est continue en a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, ce qui peut s'écrire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Extension aux fonctions à valeurs complexes.

On déduit du résultat de la caractérisation de la limite par les parties réelles et imaginaires la propriété suivante.

Propriété 2

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction définie sur $\mathcal{D}$ et $a \in \mathcal{D}$. La fonction f est continue en a si et seulement si les fonctions $g = Re(f)$ et $h = Im(f)$ sont continues en a.

Exemple 14

La fonction $f : x \mapsto e^{jx}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque 21

Seules la définition de la continuité et la notion de prolongement par continuité se généralisent aux fonctions à valeurs complexes. ***Aucun des résultats "théorème des valeurs intermédiaires", "théorème de la limite monotone" n'a de sens pour les fonctions à valeurs complexes.*** *En effet ces résultats découlent des propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$ et plus particulièrement du théorème de la borne supérieure et borne inférieure. Or il n'y a pas de théorème équivalent dans $\mathbb{C}$.*

Compléments.

1. Existe-il des fonctions discontinues en tout point de son domaine de définition ?
   OUI. Par exemple, on peut démontrer que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'admet pas de limite en tout point de $\mathbb{R}$. Elle est donc discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Le théorème des valeurs intermédiaires caractérise-t-il les fonctions continues ? Autrement dit, toute fonction vérifiant le théorème des valeurs intermédiaires est-elle nécessairement continue ?
   NON. Le mathématicien français H. LEBESGUE (1875 - 1941) a montré l'existence d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant le théorème des valeurs intermédiaires et discontinue en tout point.