Chapitre 8 : Suites

F. LICINI

franck.licini@telecom-st-etienne.fr

On rappelle que la valeur absolue d'un réel x est définie par

$$|x| = \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a donc

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

La valeur absolue d'un nombre réel correspondant à son module, les propriétés du module sont valables pour la valeur absolue, en particulier

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

La valeur absolue est utile pour définie la "distance" entre deux nombres.

Définition 1 (*Distance dans* $\mathbb{R}$)

Pour tous réels x et y, $|y - x|$ est appelé la distance entre x et y.

Remarque 1

Pour tous réels x *et* y

$$|y - x| = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Pour tout réel $\varepsilon > 0$

$$|y-x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leqslant y-x \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow x-\varepsilon \leq y \leq x+\varepsilon \Leftrightarrow y \in [x-\varepsilon; x+\varepsilon]$$

Enfin, rappelons la propriété de l'inégalité triangulaire. Pour tout réels x et y

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Définition 2 (*Intérieur d'une partie de* $\mathbb{R}$)

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$. On dit qu'un réel x appartient à l'intérieur de $\mathcal{A}$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall y \in \mathbb{R}, |y - x| \leq \varepsilon \Rightarrow y \in \mathcal{A}$$

Remarque 2

Autrement dit, x appartient à l'intérieur de $\mathcal{A}$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[x - \varepsilon; x + \varepsilon] \subset \mathcal{A}$.

Exemple 1

L'intérieur de l'intervalle $]0;1]$ est l'intervalle ouvert $]0;1[$.

Définition 3 (*Voisinage d'un réel*)

Soit x un réel. On appelle voisinage de x toute partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ telle que x appartienne à l'intérieur de $\mathcal{V}$.

Remarque 3

Autrement dit, si $\mathcal{V}$ est un voisinage de x alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[x-\varepsilon; x+\varepsilon] \subset \mathcal{V}$.

Définition 4 (*Suites réelles*)

Une suite réelle (ou suite de réels, suite à valeurs réelles) est une application de $\mathbb{N} \cap [n_0; +\infty[$ *(*$n_0 \in \mathbb{N}$*) dans* $\mathbb{R}$.

$$u : \mathbb{N} \cap [n_0; +\infty[\to \mathbb{R}$$

Remarque 4

On rappelle que l'on note $(u_n)_{n \geq n_0}$ *la suite* $u : n \mapsto u_n$ *définie sur* $\mathbb{N} \cap [n_0; +\infty[$. *On dit que la suite est définie à partir du rang* n_0.
L'image de n *est notée* u_n *et est appelée terme d'indice* n.
S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la valeur de n_0, *la suite est simplement notée* (u_n).

Définition 5 (*Suite convergente*)

On dit qu'une suite réelle (u_n) est ***convergente*** *s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\boxed{\forall \varepsilon \in]0;+\infty[, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon}$$

La suite u est dite ***divergente*** *sinon.*

Remarque 5

De manière équivalente

$$\boxed{\text{Pour tout voisinage } \mathcal{V} \text{ de } \ell, \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow u_n \in \mathcal{V}}$$

Propriété 1 (*Unicité de la limite*)

Avec les notations de la définition précédente, si ℓ existe alors ℓ est unique. On dit que ℓ est la limite de la suite u et on écrit $\lim u = \ell$.

Notation 1

Si (u_n) est convergente et $\lim u = \ell$ *alors on note aussi* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ *ou encore* $u_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell$.

On dira que " la suite (u_n) est convergente de limite ℓ " ou encore que " le terme u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ ".

Attention, on ne dira pas que la suite (u_n) (qui est une application) tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ " !

Propriété 2

Avec les notations de la définition précédente, le résultat suivant est immédiat.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0}$$

Exemple 2

Posons, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}$. *La suite* (u_n) *est convergente de limite nulle.*

Propriété 3

Si une suite réelle (u_n) est convergente de limite $\ell \neq 0$ alors pour n entier assez grand, le terme u_n est non nul et du même signe que ℓ.

Propriété 4

Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$ *alors* $\lim_{n \to +\infty} |u_n| = |\ell|$

Attention, la réciproque est fausse.

Propriété 5

Une suite réelle convergente est bornée.

Attention, la réciproque est fausse.

Propriété 6

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Si (u_n) est bornée et (v_n) est convergente de limite nulle alors la suite $(u_n v_n)$ est convergente de limite nulle.

Théorème 1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes de limites respectives ℓ et ℓ'.

- *la suite $(u_n + v_n)$ est convergente de limite $\ell + \ell'$*
- *la suite $(u_n v_n)$ est convergente de limite $\ell\ell'$*
- *si $\ell \neq 0$ alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang*

  et convergente de limite $\dfrac{1}{\ell}$

Corollaire 1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ'. Si $\ell \neq 0$ alors la suite $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang et convergente de limite $\dfrac{\ell'}{\ell}$.

Théorème 2 (*Passage à la limite pour une inégalité large*)

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles convergentes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Remarque 6

Attention, le résultat est faux pour des inégalités strictes. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles convergentes telles que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Théorème 3 (*Limite par encadrement (Théorème des gendarmes)*)

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$$

Si (u_n) et (w_n) sont convergentes de même limite ℓ alors la suite (v_n) est convergente de limite ℓ.

Corollaire 2

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq v_n$$

Si (v_n) est convergente de limite nulle alors le suite (u_n) est convergente de limite nulle.

Définition 6 (*Suite extraite*)

*Soit u une suite réelle définie à partir du rang n_0. On appelle suite extraite (ou sous-suite) de u toute suite $v = u \circ \varphi$ où $\varphi : \mathbb{N} \cap [n_0; +\infty[\to \mathbb{N}$ est **une application strictement croissante**. On a alors pour tout entier $n \geq n_0$*

$$v_n = u_{\varphi(n)}$$

Exemple 3

Soit u une suite réelle. Les suites v et w définies par $v_n = u_{n+1}$, $w_n = u_{2n}$ sont des suites extraites de u.

Propriété 7

Si u est une suite réelle convergente de limite ℓ alors toute suite extraite de u est convergente de même limite ℓ.

Remarque 7

En particulier, si la suite (u_n) est convergente de limite ℓ alors

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} u_{n+2} = \ell$$

Pour tout entier p fixé

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+p} = \ell$$

Enfin

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n} = \lim_{n \to +\infty} u_{2n+1} = \ell$$

Théorème 4

Une suite réelle u est convergente si et seulement si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes et de même limite.

Exemple 4

Posons, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (-1)^n$ et montrons que cette suite n'est pas convergente.

La droite réelle achevée

Pour simplifier l'écriture de certains résultats du cours, on rajoute à l'ensemble $\mathbb{R}$ deux éléments notés $+\infty$ et $-\infty$ pour obtenir la droite réelle achevée, notée $\overline{\mathbb{R}}$.

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$$

On étend la notion d'ordre de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty$$

Ainsi, toute toute partie non vide $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure et une borne supérieure.

$$\boxed{\text{Si } \mathcal{A} \text{ est minorée alors } \mathrm{Inf}(\mathcal{A}) \in \mathbb{R}, \text{ sinon } \mathrm{Inf}(\mathcal{A}) = -\infty.}$$

$$\boxed{\text{Si } \mathcal{A} \text{ est majorée alors } \mathrm{Sup}(\mathcal{A}) \in \mathbb{R}, \text{ sinon } \mathrm{Sup}(\mathcal{A}) = +\infty.}$$

Cette notion d'ordre est alors compatible avec l'addition et la multiplication dont les définitions sont partiellement étendues à $\overline{\mathbb{R}}$. Dans les tableaux suivants, la notation N.D. signifie que l'opération n'est pas définie.

$+$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	N.D.
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x+y$	$+\infty$
$+\infty$	N.D.	$+\infty$	$+\infty$

$\times$	$-\infty$	$y \in]-\infty; 0[$	0	$y \in]0; +\infty[$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	N.D.	$-\infty$	$-\infty$
$x \in]-\infty; 0[$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
0	N.D.	0	0	0	N.D.
$x \in]0; +\infty[$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	N.D.	$+\infty$	$+\infty$

On peut aussi convenir que l'inverse de $-\infty$ et $+\infty$ est 0 mais la définition de l'inverse de 0 n'est toujours pas possible à cause de l'ambiguïté sur le signe.

Enfin, on peut généraliser la notion de voisinage de la manière suivante.

Définition 7 (*Voisinage de $-\infty$ et $+\infty$*)

Une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est appelée voisinage de $-\infty$ s'il existe un réel A tel que $]-\infty; A] \subset \mathcal{V}$.
Une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est appelée voisinage de $+\infty$ s'il existe un réel A tel que $[A; +\infty[\subset \mathcal{V}$.

Définition 8 (*Suite de limite $+\infty$*)

On dit que la suite u a pour limite $+\infty$ si

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow u_n \geq A}$$

On écrit alors $\lim u = +\infty$.

Notation 2

Si la suite u est divergente de limite $+\infty$ alors on écrit aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ *ou encore* $u_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

Remarque 8

De manière équivalente, la définition précédente peut se réécrire

$$\boxed{\text{Pour tout voisinage } \mathcal{V} \text{ de } +\infty, \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow u_n \in \mathcal{V}}$$

Suites de limite infinie

Définition 9 (*Suite de limite $-\infty$*)

On dit que la suite u a pour limite $-\infty$ si

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow u_n \leq A}$$

On écrit alors $\lim u = -\infty$

Notation 3

Si la suite u est divergente de limite $-\infty$ alors on écrit aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ *ou encore* $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

Remarque 9

De manière équivalente, la définition précédente peut se réécrire

$$\boxed{\text{Pour tout voisinage } \mathcal{V} \text{ de } -\infty, \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow u_n \in \mathcal{V}}$$

Suites de limite infinie

Théorème 5 (*Limite par comparaison*)

Soient u et v deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$$

- *si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- *si* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Théorème 6

Soit u et v deux suites réelles admettant des limites (éventuellement infinies). Chaque fois que les quantités ci-dessous sont bien définies, on a

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n+\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_nv_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\times\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_n}\right)=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}v_n}{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n}$

Remarque 10

On prendra garde à bien retenir tous les cas de ***formes indéterminées*** *:* $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ *et* $\infty - \infty$

Théorème 7 (*Convergence des suites monotones*)

- *Si u est une suite réelle croissante alors elle admet une limite*
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = Sup\{u_n/n \in \mathbb{N}\}}$$
La suite u est convergente si et seulement si elle est majorée. Dans le cas contraire, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- *Si u est une suite réelle décroissante alors elle admet une limite*
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = Inf\{u_n/n \in \mathbb{N}\}}$$
La suite u est convergente si et seulement si elle est minorée. Dans le cas contraire, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Définition 10 (*Suites adjacentes*)

Soient u et v deux suites réelles.
On dit qu'elles sont adjacentes si l'une de ces deux suites est croissante, l'autre décroissante et $\lim_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$.

Théorème 8 (*Théorème des suites adjacentes*)

Si u et v sont deux suites adjacentes alors elles sont convergentes et ont la même limite.

Exemple 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ *et* $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$. *Montrer que* u *et* v *sont adjacentes.*

Théorème 9 (*Bolzano-Weierstrass*)

Si u est une suite réelle bornée alors elle admet une suite extraite convergente.

Exemple 6

Déterminons une suite extraite convergente de (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Dans ce paragraphe, on considère des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 11 (*Suite convergente*)

*On dit qu'une suite complexe (u_n) est convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{n \to +\infty} |u_n - \ell| = 0$. La suite u est dite **divergente** sinon.*

Cette définition généralise ce qui a été vu dans le cas réel. Si ℓ existe alors ℓ est unique. On dit que ℓ est la limite de la suite u et on écrit $\lim u = \ell$ ou $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$ ou encore $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

Théorème 10

Une suite complexe u est convergente si et seulement les suites réelles $Re(u)$ et $Im(u)$ sont convergentes et dans ce cas

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} Re(u_n) + j \lim_{n\to+\infty} Im(u_n)}$$

Exemple 7

Etudier la convergence de la suite définie par $u_n = \dfrac{e^{jn}}{n}$.

Certaines propriétés obtenues pour le suites réelles se généralisent pour les suites complexes, mais par celles qui dépendent de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ qui ne peut pas se prolonger à $\mathbb{C}$.

Lemme 1

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$. *Si la suite* (z^n) *est convergente alors sa limite est nulle.*

Théorème 11 (*Suites géométriques réelles*)

Soit a un nombre réel.

- *si* $|a| < 1$ *alors la suite* (a^n) *est convergente de limite nulle*
- *si* $a = 1$ *alors la suite* (a^n) *est constante égale à 1*
- *si* $a > 1$ *alors la suite* (a^n) *est divergente de limite* $+\infty$
- *si* $a \leq -1$ *alors la suite* (a^n) *n'admet pas de limite*

On en déduit le résultat suivant.

Théorème 12 (*Suites géométriques complexes*)

Soit z un nombre complexe.

- *si $|z| < 1$ alors la suite (z^n) est convergente de limite nulle*
- *si $z = 1$ alors la suite (z^n) est constante égale à 1*
- *si $|z| \geq 1$ et $z \neq 1$ alors la suite (z^n) est divergente*

Exemple 8

Etudier la convergence des suites $((1+j)^n)$, $\left(\left(\frac{1+j}{5}\right)^n\right)$ et $\left(e^{jn}\right)$.

Définition 12 (*Série*)

Soit $(u_k)_{k\geqslant 0}$ *une suite à valeurs complexes. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ *s'appelle la série de terme général* u_k. *Cette série est notée* $\sum_{k\geqslant 0} u_k$.

Définition 13 (*Série convergente*)

Soit $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ *une série. Si la suite* $(S_n)_{n\geqslant 0}$ *est convergente de limite* S *alors on note*

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

Dans ce cas, on dit que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ *est convergente de somme* S. *Dans le cas contraire, on dit que la série est divergente.*

Propriété 8 (*Condition nécessaire de convergence*)

Si la série $\sum_{k \geqslant 0} u_k$ *est convergente alors* $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Remarque 11

Attention, la réciproque est fausse. Par exemple, on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ *mais la série* $\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k}$ *(appelée* ***série harmonique****) est divergente.*

Propriété 9 (*Série géométrique*)

Soit z un nombre complexe. La série géométrique $\sum_{k\geqslant 0} z^k$ est convergente si et seulement si $|z| < 1$. Dans ce cas

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

Exemple 9

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$.

Propriété 10 (*Loi géométrique*)

Soit $p \in]0;1[$ et $q = 1 - p$. On répète des épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès p (et de probabilité d'échec q). On note X la variable aléatoire donnant le rang du premier succès. Les valeurs possibles de X sont les entiers naturels non nuls. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X = k) = q^{k-1}p$$

*On dit que X suit la **loi géométrique** de paramètre p.*

Remarque 12

On a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$$