

Chapitre 7 : Fractions rationnelles

F. LICINI

franck.licini@telecom-st-etienne.fr

Dans ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définition 1 (Fraction rationnelle)

Soient $A(X)$, $B(X)$, $N(X)$ et $D(X)$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} , $D(X)$ et $B(X)$ n'étant pas nuls. Si

$A(X)D(X) = B(X)N(X)$ alors on note $\frac{A(X)}{B(X)} = \frac{N(X)}{D(X)}$.

On appelle **fraction rationnelle** à coefficients dans \mathbb{K} tout élément $F(X)$ représenté par un quotient de la forme $\frac{N(X)}{D(X)}$ où $N(X)$ et $D(X)$ sont des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} , $D(X)$ n'étant pas le polynôme nul.

Remarque 1

Les deux quotients $\frac{A(X)}{B(X)}$ et $\frac{N(X)}{D(X)}$ représentent la même fraction rationnelle $F(X)$ si et seulement si $A(X)D(X) = B(X)N(X)$.

$$\frac{A(X)}{B(X)} = \frac{N(X)}{D(X)} \Leftrightarrow A(X)D(X) = B(X)N(X)$$

Dans ce cas, on écrit $F(X) = \frac{A(X)}{B(X)} = \frac{N(X)}{D(X)}$.

Notation 1

On note $\mathbb{R}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans \mathbb{R} , c'est-à-dire les fractions rationnelles représentées par un quotient de deux polynômes à coefficient dans \mathbb{R} . De même, on note $\mathbb{C}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans \mathbb{C} . On a donc $\mathbb{R}(X) \subset \mathbb{C}(X)$.

Notation 2

On fait correspondre à tout polynôme $P(X)$ la fraction rationnelle $\frac{P(X)}{1}$ où 1 désigne le polynôme constant égal à 1.
En ce sens $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$.

Propriété 1 (Représentant irréductible)

Soit $F(X)$ une fraction rationnelle non nulle à coefficients dans \mathbb{K} .
Il existe un unique couple de polynômes $N(X)$ et $D(X)$ à coefficients dans \mathbb{K} tels que :

- $D(X)$ est non nul et le coefficient de son monôme de plus haut degré est 1 ;
- $N(X)$ et $D(X)$ n'ont aucune racine complexe en commun ;
- $F(X) = \frac{N(X)}{D(X)}$.

On dit que $\frac{N(X)}{D(X)}$ est le **représentant irréductible** de la fraction rationnelle $F(X)$.

Exemple 1

Déterminer le représentant irréductible de $F(X) = \frac{X - \frac{1}{2}}{4X^2 - 1}$.

Remarque 2

La fraction rationnelle nulle est la fraction rationnelle correspondant au polynôme nul. Son représentant irréductible est $\frac{0}{1}$ où 0 et 1 désignent respectivement le polynôme nul et le polynôme constant égal à 1.

Définition 2 (Pôles d'une fraction rationnelle)

Soit $F(X)$ une fraction rationnelle non nulle à coefficients dans \mathbb{K} , de représentant irréductible $\frac{N(X)}{D(X)}$. On appelle pôle d'ordre n de $F(X)$ toute racine d'ordre n de $D(X)$.

Définition 3 (Evaluation)

Soit $F(X)$ une fraction rationnelle à coefficients dans \mathbb{K} , de représentant irréductible $\frac{N(X)}{D(X)}$ et $x \in \mathbb{K}$ tel que $D(x) \neq 0$ (x n'est pas un pôle de $D(X)$). On appelle **valeur de $F(X)$ en x** le nombre

$$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

Remarque 3 (Fonction rationnelle)

On associe donc à toute fraction rationnelle $F(X)$ de représentant irréductible $\frac{N(X)}{D(X)}$ une fonction $x \mapsto \frac{N(x)}{D(x)}$ définie sur \mathbb{K} privé des pôles de $F(X)$ (les racines de $D(X)$), à valeurs dans \mathbb{K} . Une telle fonction est appelée **fonction rationnelle**.

Définition 4 (Degré d'une fraction rationnelle)

Soit $F(X)$ une fraction rationnelle non nulle à coefficients dans \mathbb{K} , de représentant irréductible $\frac{N(X)}{D(X)}$. Son **degré** est l'entier relatif $\deg(F(X)) = \deg(N(X)) - \deg(D(X))$.

On convient que la fraction rationnelle nulle a pour degré $-\infty$.

Remarque 4

Par convention, posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\infty - n = -\infty$. Dans tous les cas, on a alors

$$\deg(F(X)) = \deg(N(X)) - \deg(D(X))$$

Remarque 5

Soit $F(X) = \frac{A(X)}{B(X)}$ une fraction rationnelle à coefficients dans \mathbb{K} .

On a alors

$$\deg(F(X)) = \deg\left(\frac{A(X)}{B(X)}\right) = \deg(A(X)) - \deg(B(X))$$

Autrement dit, la formule précédente est valable quelle que soit la représentation de la fraction rationnelle $F(X)$.

Remarque 6

Pour tout polynôme $P(X)$ à coefficients dans \mathbb{K} , on a

$$\deg\left(\frac{P(X)}{1}\right) = \deg(P(X)) - 0 = \deg(P(X))$$

Ainsi la notion de degré d'une fraction rationnelle prolonge celle de degré d'un polynôme.

Définition 5 (*Sommes, produits et quotient*)

Soit $F(X) = \frac{A(X)}{B(X)}$ et $G(X) = \frac{C(X)}{D(X)}$ deux fractions rationnelles à coefficients dans \mathbb{K} et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose :

$$(\lambda F)(X) = \frac{\lambda A(X)}{B(X)}$$

$$F(X) + G(X) = \frac{A(X)D(X) + B(X)C(X)}{B(X)D(X)}$$

$$F(X) \times G(X) = \frac{A(X)C(X)}{B(X)D(X)}$$

$$\frac{1}{F(X)} = \frac{B(X)}{A(X)} \quad \text{si } F(X) \neq 0$$

$$\frac{G(X)}{F(X)} = G(X) \times \frac{1}{F(X)} = \frac{C(X)B(X)}{D(X)A(X)} \quad \text{si } F(X) \neq 0$$

Définition 6 (*Partie entière d'une fraction rationnelle*)

Soit $F(X) = \frac{A(X)}{B(X)}$ une fraction rationnelle à coefficients dans \mathbb{K} .

En effectuant la division euclidienne (puissances décroissantes) de $A(X)$ par $B(X)$, on obtient :

$$A(X) = B(X)Q(X) + R(X) \quad \text{avec } \deg(R(X)) < \deg(B(X))$$

Ceci s'écrit :

$$\frac{A(X)}{B(X)} = Q(X) + \frac{R(X)}{B(X)} \quad \text{avec } \deg(R(X)) < \deg(B(X))$$

Le polynôme $Q(X)$ s'appelle la **partie entière** de la fraction rationnelle $F(X)$.

Remarque 7

- si $\deg(F(X)) \geq 0$ alors $\deg(Q(X)) = \deg(F(X))$
(en particulier si $\deg(F(X)) = 0$ alors $Q(X)$ est un polynôme constant)
- si $\deg(F(X)) < 0$ alors $Q(X) = 0$.

Remarque 8

Si $R(X) = 0$ alors $A(X)$ est divisible par $B(X)$ et la fraction rationnelle est un polynôme.

EXEMPLE INTRODUCTIF. On sait trouver par "intégration immédiate" les primitives de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

Mais, résoudre le même problème pour la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{4x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2 + x}$$

ne semble pas aussi facile !

Pourtant, si on réduit au même dénominateur, développe, réduit, ordonne la somme de fractions rationnelles définissant la fonction f , on trouve $f(x) = g(x)$. Les deux problèmes aboutissent aux mêmes résultats. Les fractions rationnelles figurant dans l'écriture de $f(x)$ sont simples à intégrer, on les appelle justement "éléments simples". La suite de ce cours va donner les méthodes pour obtenir une **décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples** comme celle que nous venons de mettre en évidence :

$$\frac{4x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2 + x} = \frac{2}{x} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

Théorème 1 (Décomposition en éléments simples sur \mathbb{R})

Toute fraction rationnelle à coefficients réels s'écrit, de manière unique, comme somme de :

- sa partie entière
- fractions rationnelles, **éléments simples de première espèce**, de la forme

$$\frac{\alpha}{(X - a)^n}$$

avec α constante réelle

- fractions rationnelles, **éléments simples de seconde espèce**, de la forme

$$\frac{\alpha X + \beta}{(X^2 + bX + c)^n}$$

avec $X^2 + bX + c$ non factorisable dans \mathbb{R} et α et β constantes réelles

Décomposition en éléments simples.

Cette écriture est appelée décomposition en éléments simples (sur \mathbb{R}) de la fraction rationnelle.

Comment obtenir la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle $\frac{N(X)}{D(X)}$?

Décomposition du dénominateur.

On décompose le polynôme $D(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Simplification de la fraction rationnelle.

On recherche les racines communes de $N(X)$ et $D(X)$ pour simplifier au maximum la fraction. On obtient ainsi une représentation irréductible. Dans la suite, on travaillera avec cette représentation irréductible.

Recherche de la partie entière.

- Si $\deg(N(X)) < \deg(D(X))$, la partie entière est nulle.
- Sinon, il existe une partie entière non nulle obtenue en divisant $N(X)$ par $D(X)$ selon les puissances décroissantes. On a alors
$$\frac{N(X)}{D(X)} = Q(X) + \frac{R(X)}{D(X)}$$
 et on est alors ramené à l'étude d'une fraction rationnelle $\frac{R(X)}{D(X)}$ telle que $\deg(R(X)) < \deg(D(X))$.

Écriture de la décomposition en éléments simples.

On écrit la forme de la décomposition en éléments simples.

- si la fraction possède un pôle a d'ordre n , la factorisation de $D(X)$ contient le facteur $(X - a)^n$. On a alors une partie principale composée d'**éléments simples de première espèce** :

$$\frac{\alpha_n}{(X - a)^n} + \frac{\alpha_{n-1}}{(X - a)^{n-1}} + \cdots + \frac{\alpha_1}{(X - a)}$$

- si la fraction possède deux pôles complexes conjugués d'ordre n , la factorisation de $D(X)$ contient un facteur $(X^2 + bX + c)^n$, avec $X^2 + bX + c$ non factorisable dans \mathbb{R} . On a alors une partie principale composée d'**éléments de seconde espèce** :

$$\frac{\alpha_n X + \beta_n}{(X^2 + bX + c)^n} + \frac{\alpha_{n-1} X + \beta_{n-1}}{(X^2 + bX + c)^{n-1}} + \cdots + \frac{\alpha_1 X + \beta_1}{(X^2 + bX + c)}$$

Calcul des constantes.

Pour calculer ces différentes constantes, plusieurs méthodes seront vues en TD.

Exemple 2

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle donnée dans l'exemple introductif.

$$g(X) = \frac{4X^2 + 3X + 2}{X^3 + X^2 + X}$$