s

Chapitre 6 : Polynômes

F. LICINI

franck.licini@telecom-st-etienne.fr

Définition 1 (*Polynôme*)

On appelle ***polynôme*** *à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *toute suite* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathbb{R}$ *nulle à partir d'un certain rang.*
On représente un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ *par*

$$\boxed{P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k}$$

La somme se limite à un nombre fini de termes car il existe $n \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tout* $k > n$, $a_k = 0$. *On peut donc aussi écrire*

$$\boxed{P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \cdots + a_n X^n}$$

On dit que X est l'**indéterminée** du polynôme.
Un polynôme qui ne comprend qu'un seul terme non nul est appelé **monôme**.

Remarque 1

On définit de manière similaire les polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Notation 1

On note $\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.
On a $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

Remarque 2

*Le **polynôme nul** est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls. On pourra le noter simplement 0.*

Exemple 1

Le polynôme $P(X) = -2 + 5X + X^2 + 6X^3$ *est un polynôme à coefficients réels,* $P(X) \in \mathbb{R}[X]$.
Le polynôme $Q(X) = 1 - jX$ *est un polynôme à coefficients complexes,* $Q(X) \in \mathbb{C}[X]$.
Le polynôme $R(X) = -6X^3$ *est un monôme de* $\mathbb{R}[X]$.

Propriété 1 (*Egalité de deux polynômes - Identification*)

Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coefficients.

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ *et* $Q(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ *deux polynômes.*

$$P(X) = Q(X) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, a_k = b_k \qquad \textit{(Identification)}$$

Remarque 3

En particulier un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ *est nul si et seulement si* $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = 0$.

Identification

Exemple 2

Déterminer $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ *tel que*
$a + bX + cX^2 + dX^3 = -2 + X^2 - 6X^3$.

Evaluation

Définition 2 (*Evaluation*)

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ *un polynôme et* $x \in \mathbb{C}$*. On appelle* ***valeur de*** $P(X)$ ***en*** x *le nombre*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

Remarque 4

On associe donc au polynôme $P(X)$ *une fonction (fonction polynomiale)* $x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ *qui est définie sur* $\mathbb{C}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{C}$.

Exemple 3

Soit $P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3$. *Calculer* $P(0)$, $P(1)$ *et* $P(2)$.

Définition 3 (*Degré d'un polynôme non nul*)

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ *un polynôme non nul. Son* ***degré*** *est le plus grand entier* n *tel que* $a_n \neq 0$. *On le note* $n = \deg(P(X))$

Notation 2 (*Degré du polynôme nul*)

On note $-\infty$ *le degré d'un polynôme nul. Dans la suite de ce chapitre, on a par convention* $-\infty < n$ *et* $-\infty + n = -\infty$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Notation 3 (*Polynômes constants*)

Les polynômes de degré inférieur ou égal à 0 sont les ***polynômes constants***.

Remarque 5

Un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ peut être ordonné :

- *selon les **puissances croissantes***

$$P(X) = a_0 + a_1X + \cdots a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$$

- *selon les **puissances décroissantes***

$$P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots a_2X^2 + a_1X + a_0$$

Définition 4 (*Sommes de polynômes*)

Soit $P(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, $Q(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ *deux polynômes. On pose*

$$(P+Q)(X)=P(X)+Q(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k+b_k)\,X^k$$

Définition 5 (*Multiplication par un scalaire*)

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ *un polynôme et* $\lambda \in \mathbb{C}$. *On pose*

$$(\lambda P)(X) = \lambda (P(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k X^k$$

Remarque 6

*Pour tout polynôme $P(X)$, $P(X) + (-1)P(X) = 0$. Le polynôme $(-1)P(X)$ est **l'opposé** de $P(X)$ et il est noté $-P(X)$.*

$$P(X) + (-P(X)) = P(X) - P(X) = 0$$

Exemple 4

Déterminer le degré du polynôme
$P(X) = 3X^4 + 6X^3 + X^2 - 2 - 3X^4$.

On définit facilement la somme de deux polynômes, le produit d'un polynôme par un scalaire (un nombre réel ou complexe). Précisons la définition du produit de deux polynômes.

Définition 6 (*Produits de polynômes*)

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, $Q(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ *deux polynômes. On pose*

$$(PQ)(X) = P(X)Q(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k$$

$$\text{où } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$$

Exemple 5

Déterminons le produit de $P(X) = 1 + X$ *et* $Q(X) = 1 + X + X^2$.

La somme et le produit des polynômes possèdent les propriété de commutativité et distributivité. Notons de plus l'importance de la propriété suivante.

Propriété 2

Soit $P(X)$, $Q(X)$ deux polynômes.

$$\boxed{(PQ)(X) = 0 \textit{ si et seulement si } P(X) = 0 \textit{ ou } Q(X) = 0}$$

Remarque 7

La définition du produit de deux polynômes induit celle de la puissance d'un polynôme. Et pour tout entier naturel k non nul

$$P^k(X) = (P(X))^k = \underbrace{P(X)P(X)\cdots P(X)}_{k \text{ facteurs}}$$

On généralise cette définition en posant

$$P^0(X) = 1$$

Exemple 6

Soit $P(X) = -2 + 5X + X^2$ *et* $Q(X) = 1 + 3X$. *Déterminons les polynômes* $(P + Q)(X)$, $(2P)(X)$, $P^2(X)$ *et* $(PQ)(X)$.

Théorème 1 (*Formule du binôme de Newton pour les polynômes*)

Pour tout entier naturel n et tous polynômes $P(X)$ et $Q(X)$

$$(P(X)+Q(X))^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^k(X)Q^{n-k}(X)$$

Définition 7 (*Composition de polynômes*)

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ *et* $Q(X)$ *deux polynômes. On pose*

$$(P \circ Q)(X) = P(Q(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (Q(X))^k$$

Propriété 3

Avec les notations de la définition précédente, $(P \circ Q)(X)$ *est un polynôme.*

Exemple 7

Soit $P(X) = -2 + 5X + X^2 + 6X^3$ *et* $Q(X) = 1 + 3X$.
Déterminons les polynômes $(P \circ Q)(X)$ *et* $(Q \circ P)(X)$.

Remarque 8

$\boxed{\textit{La composition des polynômes n'est pas commutative.}}$

Définition 8 (*Polynôme dérivé*)

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ *un polynôme. Son* ***polynôme dérivé*** *est*

$$\boxed{P'(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^{k-1}}$$

Remarque 9

Le changement d'indice $i = k - 1$ donne

$$\boxed{P'(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} (i+1) a_{i+1} X^i}$$

Dérivation

Exemple 8

Calculons le polynôme dérivé de $P(X) = 1 + X + X^2$.

Théorème 2

Un polynôme $P(X)$ est constant si et seulement si $P'(X) = 0$.

Démonstration :

Théorème 3 (*Linéarité de la dérivation*)

Pour tous polynômes $P(X)$, $Q(X)$ *et toute constante* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{(\lambda P)'(X) = \lambda P'(X)}$$

$$\boxed{(P+Q)'(X) = P'(X) + Q'(X)}$$

Théorème 4 (*Dérivation d'un produit*)

Pour tous polynômes $P(X)$ *et* $Q(X)$.

$$\boxed{(PQ)'(X) = (P'Q)(X) + (PQ')(X) = P'(X)Q(X) + P(X)Q'(X)}$$

Corollaire 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout polynôme $P(X)$

$$\boxed{(P^n)'(X) = nP^{n-1}(X)P'(X)}$$

Remarque 10

Par abus d'écriture, on utilisera cette formule également pour $n = 0$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (P^n)'(X) = nP^{n-1}(X)P'(X)}$$

Théorème 5 (*Dérivation d'une composée*)

Pour tous polynômes $P(X)$ et $Q(X)$.

$$\boxed{(P \circ Q)'(X) = (P' \circ Q)(X) Q'(X) = P'(Q(X))\, Q'(X)}$$

Exemple 9

Soit $P(X)$ un polynôme. Calculons les polynômes dérivés de $P_1(X) = P(-X)$, $P_2(X) = P(2X)$ et $P_3(X) = P\left(X^2\right)$.

Remarque 11

On définit ainsi, de proche en proche le polynôme dérivé d'ordre $n \in \mathbb{N}$ d'un polynôme.
$P^{(0)}(X) = P(X)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P^{(n)}(X)$ est le polynôme dérivé de $P^{(n-1)}(X)$.

Théorème 6 (*Formule de Leibnitz*)

Soit $P(X)$ et $Q(X)$ deux polynôme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{(PQ)^{(n)}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)}(X) Q^{(n-k)}(X)}$$

Exemple 10

Soit $P(X)$ un polynôme. Calculons les polynômes dérivés de $H(X) = XP(X)$.

Théorème 7 (*Formule de Taylor*)

Soit $P(X)$ un polynôme et $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\boxed{P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k}$$

Remarque 12

Si $\deg(P(X)) = n$ *alors :*

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$$

$$P(X) = P(\alpha) + \frac{P'(\alpha)}{1!}(X-\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2!}(X-\alpha)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n$$

Et en particulier, pour $\alpha = 0$ *:*

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}X + \frac{P''(0)}{2!}X^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}X^n$$

Exemple 11

Déterminons les polynômes dérivés de $P(X) = 1 + X + X^2 + X^3$ *et vérifions que*

$$P(X) = P(0) + \frac{P'(0)}{1}X + \frac{P''(0)}{2!}X^2 + \frac{P^{(3)}(0)}{3!}X^3$$

Nous admettrons le résultat suivant :

Théorème 8 (*Division euclidienne ou division selon les puissances d*

Soit $A(X)$ et $B(X)$ deux polynômes tels que $B(X)$ ne soit pas le polynôme nul. Il existe un unique couple $(Q(X); R(X))$ de polynômes tels que :

$$\boxed{\begin{cases} A(X) = B(X)Q(X) + R(X) \\ \deg(R(X)) < \deg(B(X)) \end{cases}}$$

Le polynôme $Q(X)$ s'appelle le ***quotient*** *et $R(X)$ le* ***reste*** *de la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$.*

Remarque 13

Si $\deg(A(X)) < \deg(B(X))$ alors $Q(X) = 0$ et $R(X) = A(X)$.

Exemple 12

Effectuer la division euclidienne de $A(X) = 2X^4 - X^2 + 3X + 1$ *par* $B(X) = X^2 + X + 1$.

Division

Définition 9

Avec les notations du théorème précédent, si $R(X) = 0$ alors $A(X) = Q(X)B(X)$. Dans ce cas, on dit que $A(X)$ est un ***multiple*** *de $B(X)$ ou encore que $A(X)$ est* ***divisible*** *par $B(X)$.*

Définition 10 (*Racine d'un polynôme*)

*Soit $P(X)$ un polynôme et $\alpha \in \mathbb{C}$. Si $P(\alpha) = 0$ alors on dit que α est une **racine** de P.*

Exemple 13

Montrons que $\alpha = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ est racine de $P(X) = 1 + X + X^2$.

Propriété 4 (*Division par $\boldsymbol{X} - \alpha$*)

Soit $P(X)$ un polynôme et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Le polynôme $P(X)$ est divisible par $X - \alpha$ si et seulement si α est racine de $P(X)$.

Démonstration :

Corollaire 2

Un polynôme $P(X)$ admet $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ comme racines distinctes si et seulement s'il est divisible par $\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$.

Théorème 9 (*Nombre maximal de racines d'un polynôme*)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P(X)$ un polynôme de degré n. Le polynôme $P(X)$ admet au plus n racines distinctes.

Corollaire 3

Soit $n \in \mathbb{N}$, $P(X)$ et $Q(X)$ deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n. Si $P(X)$ et $Q(X)$ prennent la même valeur en au moins $n+1$ valeurs distinctes alors les polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ sont égaux.

Corollaire 4

Si $P(X)$ est un polynôme admettant une infinité de racines alors $P(X)$ est le polynôme nul.

Définition 11 (*Ordre de multiplicité d'une racine*)

Soit $P(X)$ un polynôme non nul et $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de $P(X)$.
L'ordre de multiplicité de la racine α est le plus grand entier naturel k tel que $P(X)$ soit divisible par $(X-\alpha)^k$.
Les racines qui ont un ordre de multiplicité égal à 1 sont dites ***racines simples****, celles qui ont un ordre de multiplicité supérieur ou égal à 2 sont dites* ***racines multiples****.*

Racines d'un polynôme

Théorème 10 (*Ordre de multiplicité et dérivation*)

Soit $P(X)$ un polynôme non nul, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

α *est racine d'ordre de multiplicité n de $P(X)$ si et seulement si*

$$\begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \cdots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(n)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Exemple 14

Soit $P(X) = 2X^4 - 3X^3 - 3X^2 + 7X - 3$*. Déterminer les racines de* P *avec leur ordre de multiplicité.*

Théorème 11 (***Nombre maximal de racines d'un polynôme***)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P(X)$ un polynôme de degré n. Le polynôme $P(X)$ admet au plus n racines, chacune étant comptée autant de fois que sa multiplicité.
En particulier, $P(X)$ admet au plus n racines distinctes.

Nous admettrons le théorème suivant aussi appelé **théorème fondamental de l'algèbre**.

Théorème 12 (*Théorème de D'Alembert*)

Si $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ n'est pas constant alors il admet au moins une racine.

Théorème 13

Tout polynôme $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$ peut s'écrire d'une manière unique (à l'ordre près des facteurs) sous la forme :

$$\boxed{P(X) = a_n \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{r_i}}$$

a) $a_n \in \mathbb{C}$ *est le coefficient du terme de plus haut degré de* $P(X)$

b) $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ *sont les racines de* $P(X)$ *d'ordres de multiplicité respectifs* $r_1, \cdots r_p$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} r_i = n.$

Exemple 15

Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ *le polynôme* $P(X) = 3X^4 + 9X^2 - 12$.

Propriété 5

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. *Si* $\alpha \in \mathbb{C}$ *est une racine de* $P(X)$ *alors* $\overline{\alpha}$ *est racine de* $P(X)$. *De plus les racines* α *et* $\overline{\alpha}$ *ont même ordre de multiplicité.*

Remarque 14

Attention, cette propriété est fausse si le polynôme $P(X)$ *n'est pas à coefficients réels.*

Théorème 14

Tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$ peut s'écrire d'une manière unique (à l'ordre près des facteurs) sous la forme :

$$\boxed{P(X) = a_n \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{r_i} \times \prod_{k=1}^{q} (Q_k(X))^{s_k}}$$

a) *$a_n \in \mathbb{R}$ est le coefficient du terme de plus haut degré de $P(X)$.*

b) *$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ sont les racines réelles de $P(X)$ d'ordres de multiplicité respectifs $r_1, \cdots r_p$.*

c) *les polynômes $Q_k(X)$ sont du second degré, à coefficients réels et sans racine réelle.*

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} r_i + 2\sum_{k=1}^{q} s_k = n.$

Exemple 16

Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ *le polynôme* $P(X) = X^3 - 1$