Chapitre 4 : Sommes discrètes

F. LICINI

franck.licini@telecom-st-etienne.fr

Notation 1

Soient n et m deux entiers naturels tels que $m \leq n$. On note :

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n}$$

Cette somme contient $n - m + 1$ termes. On peut aussi la noter $\displaystyle\sum_{m \leq k \leq n} a_k$.

Exemple 1

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1$.

L'**indice** k est un indice **" muet "**. C'est-à-dire que l'on peut le changer par n'importe quel autre symbole non utilisé par ailleurs. Par exemple, on a :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=m}^{n} a_i$$

Propriété 1 (*Linéarité de la somme*)

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=m}^{n}a_k+\sum_{k=m}^{n}b_k}$$

Pour toute constante λ

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=m}^{n}a_k}$$

Remarque 1

Attention dans la propriété précédente, λ doit être une constante, c'est à dire ne pas dépendre de l'indice de sommation.

Remarque 2

Attention, la sommation se comporte mal avec les produits. En général, on a

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} a_k b_k \neq \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=m}^{n} b_k\right)}$$

On procède à un changement d'indice pour deux raisons :

1. **Changer l'indice dans les termes de la somme.**
   Par exemple, avec le changement d'indice $i = k + 1$, on obtient

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} a_{k+1} = \sum_{i=m+1}^{n+1} a_i}$$

2. **Changer les bornes de la somme .**
   Par exemple, avec le changement d'indice $i = k - 2$ (ce qui équivaut à $k = i + 2$), on obtient

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n+2} a_k = \sum_{i=0}^{n} a_{i+2}}$$

Exemple 2

Ecrire la somme $\sum_{k=3}^{n} a_{k+2}$ *avec le changement d'indice* $i = k + 2$.

A-t-on $\sum_{k=3}^{n} a_{k+2} = \sum_{k=5}^{n+2} a_k$ *?*

Ecrire la somme $\sum_{k=4}^{n+4} a_k$ *avec le changement d'inidice* $i = k - 4$.

A-t-on $\sum_{k=4}^{n+4} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{k+4}$ *?*

Remarque 3

Attention, on ne peut pas effectuer n'importe quel changement d'indice.

Par exemple, on ne peut pas calculer $\sum_{k=0}^{n} a_{2k}$ *avec le changement d'indice* $i = 2k$.

Théorème 1

Soient n et m deux entiers naturels tels que $m \leq n$.

$$\sum_{k=m}^{n} [a_{k+1} - a_k] = a_{n+1} - a_m$$

Exemple 3

Soit n un entier naturel.

Calculer de deux manières $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^2 - k^2\right]$.

En déduire la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

Propriété 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Remarque 4

Si $n \in \mathbb{N}^*$ *alors on a aussi* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exemple 4

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2+3k)$.

Propriété 3

Si $q \neq 1$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

Exemple 5

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2 \cdot 3^k)$.

La factorielle d'un entier

Définition 1 (*Factorielle*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on appelle factorielle de* n *et on note* $n!$ *l'entier naturel défini par :*

$$\boxed{n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n}$$

Par convention, $0! = 1$

Remarque 5

L'opération $n!$ *se lit "factorielle de* n*", ou "factorielle* n*", ou encore "*n *factorielle".*

Exemple 6

Calculer $5!$.

Théorème 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\boxed{(n+1)! = (n+1) \times n!}$$

Définition 2 (*Coefficients binomiaux*)

Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$. Nous noterons $\binom{n}{k}$, lu "k parmi n", le nombre entier :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés coefficients binomiaux.

Exemple 7

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{2}$.

Propriété 4 (*Propriétés des coefficients binomiaux*)

Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$.

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \textit{(Formule de symétrie)}}$$

De plus, si $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$ alors

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad \textit{(Formule de Pascal)}}$$

Notation 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Si $k < 0$ ou $k > n$ alors on pose, par convention, $\binom{n}{k} = 0$. Cette notation est compatible avec les formules précédentes qui sont donc valables pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

La formule de Pascal permet de calculer les valeurs des nombres $\binom{n}{k}$ à l'aide du **triangle de Pascal** :

$$
n \left\{ \begin{array}{cccccccccc}
1 & & & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & & & \\
1 & . & . & . & . & . & 1 & & & \\
1 & . & . & . & \binom{n-1}{k-1} & \binom{n-1}{k} & . & . & 1 & \\
1 & . & . & . & . & \binom{n}{k} & . & . & . & 1
\end{array} \right.
$$

Théorème 3 (*Formule du binôme de Newton*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *et* $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ *:*

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

Démonstration : Une démonstration par récurrence sera faite en TD. ■

Exemple 8

Développer $(a+b)^3$ *et* $(a+b)^4$.

Exemple 9

Soit $n \in \mathbb{N}$. *Calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ *et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Remarque 6

La formule du binôme de Newton permet d'interpréter les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ comme "le nombre de fois où l'on obtient le produit $a^k b^{n-k}$ dans le développement de $(a+b)^n$", ou encore comme "le nombre de façons de choisir les k facteurs égaux à a parmi les n termes $(a+b)$". Cette remarque aboutit à la formulation générale suivante.

Propriété 5

Soit n et k deux entiers et E un ensemble fini de cardinal n.

Le nombre de parties de E qui ont un cardinal égal à k est $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Corollaire 1

Si E est un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ alors $\mathcal{P}(E)$ est fini de cardinal 2^n.

Démonstration :

Application aux probabilités : loi binomiale

On considère une expérience aléatoire ayant deux issues notées "Succès" et "Echec". La probabilité du "Succès" est $p \in [0;1]$. On réalise cette expérience aléatoire n fois, **ces réalisations étant indépendantes**.

Soit X la variable aléatoire qui associe, à ces n réalisations, le nombre de "Succès" obtenus. Par définition, la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale de paramètres** n et p.

Définition 3 (*Loi binomiale*)

Soit $p \in [0;1]$*,* $q = 1 - p$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$*. Une variable aléatoire* X *suit la* ***loi de binomiale de paramètres*** n *et* p*, ce qu'on note* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$*, si*

$$\text{pour tout } k \in \{0,1,\cdots,n\}\,, \qquad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Exemple 10

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
Vérifier que

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = 1$$

Théorème 4 (*Espérance et variance*)

Si une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = np$$

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{k=0}^{n} (k - \mathbb{E}(X))^2 \, \mathbb{P}(X = k) = npq$$

On rappelle que $\mathbb{E}(X)$ est l'espérance et $\mathbb{V}(X)$ la variance de la variable aléatoire X.

Exemple 11

Dans la production d'une machine, 5% *des pièces sont défectueuses. On choisit au hasard successivement,* ***avec remise****, un échantillon de 15 pièces. Déterminons la probabilité d'avoir dans l'échantillon exactement une pièce défectueuse, exactement trois pièces défectueuses, au moins deux pièces défectueuses. Quel est le nombre moyen de pièces défectueuses dans les échantillons de 15 pièces ?*