Chapitre 3 : Ensembles de nombres

F. LICINI

franck.licini@telecom-st-etienne.fr

Ensemble des entiers naturels

Le premier ensemble de nombres est celui des entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$$

Axiome : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Cet axiome permet de démontrer le principe de récurrence.

Théorème 1 (*Principe de récurrence*)

On considère une propriété $(\mathcal{P}_n)$ dépendant d'un entier naturel n telle que :

- *$(\mathcal{P}_0)$ est vraie (**initialisation**) ;*
- *si $(\mathcal{P}_n)$ est vraie alors $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie (**hérédité**).*

Alors la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1

Montrons que $4^n + 2$ *est un multiple de* 3 *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 1

Dans le cas où l'initialisation est vérifiée pour $n = n_0$*, la propriété est vraie pour tout entier naturel* $n \geqslant n_0$*.*

Si on est conduit à faire une hypothèse portant sur toutes les valeurs entières comprises entre 0 et n, on parle alors de **récurrence forte**

Corollaire 1 (*Récurrence forte*)

On considère une propriété $(\mathcal{P}_n)$ dépendant d'un entier naturel n telle que :

- $(\mathcal{P}_0)$ *est vraie (**initialisation**) ;*
- *si $(\mathcal{P}_0)$ et $(\mathcal{P}_1)$ et $\ldots$ $(\mathcal{P}_n)$ sont vraies alors $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie (**hérédité**).*

Alors la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notation 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $[\![1; n]\!]$ la partie de $\mathbb{N}$ définie par

$$[\![1; n]\!] = \{1; \ldots; n\}$$

Nous utilisons dès notre plus jeune âge les entiers naturels pour "compter" un nombre d'objets. Cet usage correspond à la définition mathématique suivante qui traduit ce que signifie intuitivement qu'un ensemble est constitué de n éléments.

Définition 1 (*Ensemble fini*)

Un ensemble E non vide est dit fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ s'il existe une bijection de E dans $[\![1; n]\!]$.

Ainsi, un ensemble E est de cardinal $n \in \mathbb{N}$ si l'on peut écrire $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, où les x_i sont deux à deux distincts.

Théorème 2

La cardinal d'un ensemble E fini est unique. On le note Card(E).

Autrement dit, si n et p sont deux entiers tels qu'il existe une bijection entre E et $[\![1; n]\!]$ et une bijection entre E et $[\![1; p]\!]$ alors $n = p$.

Notation 2

Par convention, l'ensemble vide $\emptyset$ est dit fini de cardinal 0.

Propriété 1 (*Partie d'un ensemble fini*)

Soit E un ensemble fini. Toute partie A de E est finie et on a $Card(A) \leq Card(E)$. De plus, si A est différent de E alors $Card(A) < Card(E)$.

Définition 2 (*Ensemble infini*)

Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.

Théorème 3

Soit E un ensemble et A une partie de E, différente de E. S'il existe une bijection entre E et A alors E est infini.

Exemple 2

Montrons que $\mathbb{N}$ *est infini.*

Définition 3 (*Ensemble dénombrable*)

Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$.

On peut construire l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels à partir des quotients d'entiers relatifs en définissant la règle suivante. Pour tous $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $q \neq 0$ et $b \neq 0$

$$\boxed{\frac{p}{q} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow bp = aq}$$

Propriété 2 (*Représentation irréductible*)

Tout nombre rationnel s'écrit de manière unique sous la forme $\frac{p}{q}$ *avec* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$ *premiers entre eux.*

Théorème 4

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est infini dénombrable.

Il est facile de montrer que les nombres rationnels ne suffisent pas à décrire le monde réel. C'est une constatation faite depuis l'antiquité. Par exemple, un carré de diagonale égale à 2 possède un côté ℓ qui vérifie $\ell^2 = 2$. Or, on a un problème ...

Propriété 3

Il n'existe aucun nombre rationnel ℓ tel que $\ell^2 = 2$.

Pour combler ce manque, les mathématiciens ont construit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui complète l'ensemble $\mathbb{Q}$. Nous ne détaillerons pas une construction mathématiques de cet ensemble mais donnerons ses principales propriétés. La plupart de ces résultats seront donc admis.

Théorème 5 (*Propriétés arithmétiques*)

L'ensemble $\mathbb{R}$ possède une addition et une multiplication telles que pour tous réels x, y et z :

- $x + y = y + x$ *(commutativité de l'addition)*
- $0 + x = x$ *(0 est l'élément neutre de l'addition)*
- $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(associativité de l'addition)*
- *il existe un nombre* $(-x)$ *tel que* $x + (-x) = 0$ *(opposé de* x*)*
- $xy = yx$ *(commutativité de la multiplication)*
- $1x = x$ *(1 est l'élément neutre de la multiplication)*
- $(xy)z = x(yz)$ *(associativité de la multiplication)*
- $x(y + z) = xy + xz$ *(distributivité de la multiplication sur l'addition)*
- *si* $y \neq 0$ *alors il existe un nombre noté* y^{-1} *ou* $\frac{1}{y}$ *tel que* $yy^{-1} = 1$ *(inverse de* y*).*

Théorème 6 (*Propriétés d'ordre*)

L'ensemble $\mathbb{R}$ possède une relation d'ordre compatible avec l'addition et la multiplication. Plus précisément, pour tous réels x et y :

- $x \leqslant y$ *ou* $y \leqslant x$
- $x \leqslant x$ *(réflexivité)*
- *si* $x \leqslant y$ *et* $y \leqslant z$ *alors* $x \leqslant z$ *(transitivité)*
- *si* $x \leqslant y$ *et* $y \leqslant x$ *alors* $x = y$ *(anti-symétrie)*
- *si* $x \leqslant y$ *alors* $x + z \leqslant y + z$ *(compatibilité avec l'addition)*
- *si* $x \leqslant y$ *et* $0 \leqslant z$ *alors* $xz \leqslant yz$ *(compatibilité avec la multipication)*

Commençons par rappeler la définition d'un majorant ou minorant.

Définition 4 (*Partie majorée, minorée, bornée*)

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$.

- *$\mathcal{A}$ est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $x \in \mathcal{A}$, $x \leq M$.*
  On dit alors que M est un ***majorant*** *de $\mathcal{A}$.*
- *$\mathcal{A}$ est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $x \in \mathcal{A}$, $m \leq x$.*
  On dit alors que m est un ***minorant*** *de $\mathcal{A}$.*
- *$\mathcal{A}$ est bornée si $\mathcal{A}$ est majorée et minorée.*

Propriété 4 (*Maximum, minimum*)

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$.

- *Si $\mathcal{A}$ est majorée et s'il existe un majorant qui est dans $\mathcal{A}$ alors celui-ci est unique.*
  On l'appelle maximum de $\mathcal{A}$ et on le note $\max(\mathcal{A})$.
- *Si $\mathcal{A}$ est minorée et s'il existe un minorant qui est dans $\mathcal{A}$ alors celui-ci est unique.*
  On l'appelle minimum de $\mathcal{A}$ et on le note $\min(\mathcal{A})$.

On peut facilement trouver des ensembles majorés (ou minorés) qui ne possèdent pas de maximum (ou de minimum). Cependant, dans $\mathbb{R}$, nous avons la propriété suivante.

Théorème 7 (*Théorème de la borne supérieure et borne inférieure*)

Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- *Si $\mathcal{A}$ est majorée alors l'ensemble des majorants de $\mathcal{A}$ admet un minimum.*
  Celui-ci est appelé borne supérieure de $\mathcal{A}$ et on le note $Sup(\mathcal{A})$.
- *Si $\mathcal{A}$ est minorée alors l'ensemble des minorants de $\mathcal{A}$ admet un maximum.*

  Celui-ci est appelé borne inférieure de $\mathcal{A}$ et on le note $Inf(\mathcal{A})$.

Remarque 2

Si $\mathcal{A}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée et M un majorant de $\mathcal{A}$ alors

$$Sup(\mathcal{A}) \leq M$$

De même, si $\mathcal{A}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée et m un minorant de $\mathcal{A}$ alors

$$m \leq Inf(\mathcal{A})$$

Il faut bien faire la différence entre borne supérieure et maximum d'une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée admet une borne supérieure mais pas nécessairement un maximum. Il en va de même de la distinction entre borne inférieure et minimum.

Exemple 3

Déterminons la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de $]0;1]$ *et* $\{e^n | n \in \mathbb{N}\}$.

Notation 3 (*Droite réelle*)

*Une droite est munie d'une repère $(O, \vec{u})$. On peut associer à pout réel x le point $M(x)$ de coordonnée x. On dit alors que x est **l'abscisse** du point $M(x)$.*

Rappelons maintenant rapidement les propriétés de la valeur absolue d'un nombre réel.

Définition 5 (*Valeur absolue*)

Pour tout réel x, on appelle valeur absolue de x et on note $|x|$ le plus grand des réels x et $-x$. Autrement dit :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque 3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| \geqslant 0$ et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Propriété 5

Si A et B sont deux points de la droite réelle d'abcisses respectives x et y alors

$$\boxed{|y - x| = AB}$$

Remarque 4

En particulier, pour tout point M d'abscisse x, on a $|x| = OM$.

Rappelons la principale propriété de la valeur absolue.

Propriété 6 (*Inégalité triangulaire*)

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\boxed{|x + y| \leq |x| + |y|}$$

Démonstration :

Propriété 7

Une partie $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement s'il existe $R \geq 0$ tel que $\forall x \in \mathcal{A}$, $|x| \leq R$.

Théorème 8 (*Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$*)

Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

Théorème 9 (*Racine carrée d'un nombre positif*)

Soit a un nombre réel strictement positif. Il existe un unique nombre réel ℓ positif tel que $\ell^2 = a$. On appelle ce nombre la racine carrée de a et on le note $\sqrt{a}$ ou $a^{\frac{1}{2}}$.

Terminons pas le remarquable théorème du mathématicien Cantor, démontré en 1874.

Théorème 10

L'ensemble $\mathbb{R}$ est infini mais non dénombrable.

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels impose encore une limite : les nombre négatifs n'ont pas de racine carrée car si $x \in \mathbb{R}$ alors $x^2 \geqslant 0$. Donc, par exemple, il n'existe pas de nombre réel dont le carré est -1. Il faut donc encore d'autres nombres pour ne plus être limité dans les calculs. Les choses vont être très simples en rajoutant un nombre j tel que $j^2 = -1$. [1].
Avec les nombres réels et le nombre j, en conservant les propriétés arithmétiques de l'addition et la multiplication, on construit ainsi un nouvel ensemble de nombres qui contient $\mathbb{R}$, noté $\mathbb{C}$ et appelé ensemble des nombres complexes.

1. En lien avec les cours d'électricité, on utilisera cette notation (au lieu de l'habituel $i^2 = -1$)

Théorème 11 (*Forme algébrique ou cartésienne*)

Tout nombre complexe z admet une écriture unique, appelée écriture algébrique (ou cartésienne), de la forme $z = a + jb$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Corollaire 2

L'unicité de cette écriture donne le résultat suivant. Si $a + jb$ et $a' + jb'$ sont les écritures algébriques de deux nombres complexes alors

$$\boxed{a + jb = a' + jb' \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}}$$

Définition 6 (*Partie réelle, partie imaginaire*)

Si $z = a + jb$ est l'écriture algébrique d'un nombre complexe alors

- *Le nombre réel a est appelé la* ***partie réelle*** *de z. Elle est notée $Re(z)$.*
- *Le nombre réel b est appelé la* ***partie imaginaire*** *de z. Elle est notée $Im(z)$.*

Notation 4 (*Imaginaire pur*)

Si la partie imaginaire de z est nulle alors z est un nombre réel.
Si la partie réelle de z est nulle alors z est un ***imaginaire pur****. On note $j\mathbb{R} = \{jb, b \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des imaginaires purs.*

Théorème 12 (*Propriété algébrique*)

Si $z = a + jb$ *et* $z' = a' + jb'$ *sont les écritures algébriques de deux nombres complexes alors*

- $z + z' = (a + a') + j(b + b')$
- $zz' = (aa' - bb') + j(ab' + ba')$

Remarque 5

Comme les opérations dans $\mathbb{C}$ *prolongent celles dans* $\mathbb{R}$*, les règles de calcul que vous connaissez sont encore valables, en particulier toutes les identités remarquables.*

Exemple 4

Calculer $(1+j)(1-j)$ *et* $(1+j)^2$.

Définition 7 (***Conjugué d'un nombre complexe***)

Le conjugué du nombre complexe $z = a + jb$, *où* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, *est le nombre complexe* $\overline{z} = a - jb$.

Théorème 13 (*Propriétés du conjugué*)

Si z et z′ sont deux nombres complexes alors :

- $\boxed{\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}}$
- $\boxed{\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}}$
- $\boxed{\overline{(z^n)} = \overline{z}^{\,n} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$
- $\boxed{\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \quad si\ z \neq 0}$
- $\boxed{\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}} \quad si\ z \neq 0}$

Théorème 14 (*Caractérisation des nombres réels, imaginaires purs*)

Pour tout nombre complexe z on a :

- $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $Im(z) = \frac{1}{2j}(z - \overline{z})$

Ainsi

- $\boxed{z \text{ est réel} \Leftrightarrow z = \overline{z}}$
- $\boxed{z \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow z = -\overline{z}}$

Définition 8 (*Module d'un nombre complexe*)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. *Le module du nombre complexe* $z = a + jb$ *est le nombre réel positif ou nul*

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Remarque 6

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

Remarque 7

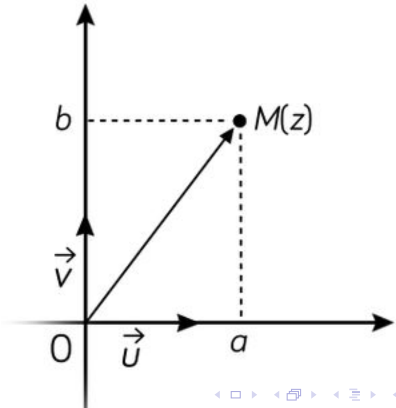
Si a est une réel alors $|a| = \sqrt{a^2}$ *est sa valeur absolue (ce qui justifie l'utilisation de la même notation pour module et valeur absolue).*

Exemple 5

Calculer le module de $z = 1 + j\sqrt{3}$.

Notation 5 (*Plan complexe*)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On peut associer au nombre complexe $z = a + jb$ le point $M(z)$ de coordonnées cartésiennes (a, b). On dit alors que z est ***l'affixe*** *de $M(z)$.*



Propriété 9

Pour tout nombre complexe z on a :

$$|Re(z)| \leqslant |z| \quad et \quad |Im(z)| \leqslant |z|$$

Démonstration :

Théorème 15

Pour tout nombre complexe $z = a + jb$, *où* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, *on a :*

$$\boxed{z\overline{z} = |z|^2}$$

Démonstration :

Théorème 16 (*Propriétés du module*)

Soient z et z' deux deux nombres complexes.

- $\boxed{|\overline{z}| = |z|}$
- $\boxed{|zz'| = |z| \times |z'|}$
- $\boxed{|z^n| = |z|^n \quad \forall n \in \mathbb{N}}$
- $\boxed{\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} \quad si\ z \neq 0}$
- $\boxed{\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|} \quad si\ z \neq 0}$

Démonstration :

Remarque 9

Par conséquent, si $z \neq 0$ *alors, pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$.

Propriété 10 (*Calcul de l'inverse*)

Si $z = a + jb$ est l'écriture algébrique d'un nombre complexe $z \neq 0$ alors

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - j\frac{b}{a^2+b^2}$$

Il n'est pas nécessaire de retenir par coeur cette formule, mais il faut savoir la *retrouver rapidement* en se souvenant qu'il suffit de *multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.*

Exemple 6

Déterminer l'écriture algébrique de l'inverse de $z = 1 + j\sqrt{3}$.

Propriété 11 (*Inégalité triangulaire*)

Pour tous nombres complexes z et z' on a

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

Démonstration :

Définition 9

*Soit A un nombre complexe. On appelle **racine carrée** de A tout nombre complexe z tel que $z^2 = A$.*

On fera attention à la différence de point de vue avec le cas d'un nombre réel positif A pour lequel la racine carrée est l'unique réel positif x tel que $x^2 = A$. Le cas des nombres complexes est différent car nous n'avons de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$ et donc pas de signe.

Propriété 12 (*Racines carrées d'un nombre complexe*)

Un nombre complexe A non nul admet exactement deux racines carrées qui sont opposées.

Exemple 7

Déterminer les racines carrées de 4 *et* -3.

Remarque 10

- *Si A est un réel positif, ses racines carrées sont $\sqrt{A}$ et $-\sqrt{A}$.*
- *Si A est un réel négatif, ses racines carrées sont $j\sqrt{-A}$ et $-j\sqrt{-A}$.*

Remarque 11

Voici une technique de calcul des racines carrées d'un nombre complexe. Cette présentation permet de faire une preuve du résultat précédent.
Soit A un nombre complexe non nul d'écriture algébrique $A = a + jb$. On recherche les nombres complexes z vérifiant $z^2 = A$ également sous forme algébrique $z = x + jy$.

$$z^2 = A \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2jxy = a + jb$$

ce qui équivaut à

$$x^2 - y^2 = a \tag{1}$$

$$2xy = b \tag{2}$$

de plus, l'égalité des modules $\left|z^2\right| = |z|^2 = |A|$ donne :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{3}$$

Exemple 8

Déterminer les racines carrées de $A = 3 + 4j$.

Dans tout ce paragraphe, a, b et c sont trois nombres complexes, a étant non nul.

Théorème 17 (*Solutions d'une équation polynomiale du second deg*

Les solutions (appelées aussi racines) de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont les nombres complexes :

$$\boxed{z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}}$$

*où δ est une racine carrée du **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$.*
On a la factorisation

$$\boxed{az^2 + bz + c = a\left(z - z_1\right)\left(z - z_2\right)}$$

Exemple 9

Résoudre l'équation $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$.

Exemple 10

Résoudre l'équation $z^2 + \sqrt{3}z - j = 0$.

Théorème 18 (*Somme et produit des racines*)

Les nombres complexes z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ si et seulement si :

$$\boxed{z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}}$$

Le résultat précédent permet d'écourter les calculs si l'on connaît déjà une des deux racines d'une équation polynomiale du second degré.

Exemple 11

Vérifier que j est solution de $2z^2 + z + 2 - j = 0$ et en déduire "rapidement" l'autre solution.