Chapitre 2 : Ensembles et applications

F. LICINI

franck.licini@telecom-st-etienne.fr

Définition 1 (*Ensemble*)

Un ensemble E est une collection d'objets telle que pour tout élément x, nous pouvons dire si l'assertion x appartient à E, notée $x \in E$, *est vraie ou fausse.*

Définition 2 (*Ensemble vide*)

On appelle ensemble vide l'ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$.

Remarque 1

Si $x \in E$ *alors on dit aussi que x est un* ***élément*** *de E.*
Lorsque x n'appartient pas à E, on note $x \notin E$, *c'est-à-dire* $[non\,(x \in E)] \Leftrightarrow [x \notin E]$.

Exemple 1

$\{1; 2; 3; 4\}$ *est l'ensemble contentant les entiers 1, 2, 3 et 4.*
$\mathbb{N}$ *est l'ensemble des nombres entiers naturels.*
$\mathbb{Z}$ *est l'ensemble des nombres entiers relatifs.*
$\mathbb{Q}$ *est l'ensemble des nombres rationnels. On a*
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.
$\mathbb{R}$ *est l'ensemble des nombres réels.*
$[0; 1]$ *est l'ensembles de nombres réels positifs et inférieurs ou égaux à 1. C'est un intervalle de* $\mathbb{R}$. *On a* $[0; 1] = \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\}$.

Définition 3 (*Inclusion*)

Soit A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B et nous notons $A \subset B$ si tout élément de A est un élément de B.

Exemple 2

$\{1; 2; 3; 4\} \subset \mathbb{N}$.

Remarque 2

Deux ensembles A et B sont égaux si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow [(A \subset B) \text{ et } (B \subset A)]}$$

Si $A \subset B$ alors on dit que A est ***sous ensemble*** *de B ou que A est* ***une partie*** *de B.*

Notation 1

Si E est une ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Remarque 3

On a donc

$$\boxed{A \subset E \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E)}$$

Exemple 3

$\{1; 2; 3; 4\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Exemple 4

Si $E = \{0; 1\}$ *alors* $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{0\}\,; \{1\}\,; E\}$.

Définition 4 (*Opérations sur les parties d'un ensemble*)

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On appelle

- ***complémentaire** de A dans E l'ensemble $\overline{A} = \{x \in E, x \notin A\}$*
- ***intersection** de A et B l'ensemble $A \cap B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B\}$*
- ***réunion** de A et B l'ensemble $A \cup B = \{x \in E, x \in A \text{ ou } x \in B\}$*
- ***différence** de A et B l'ensemble $A \backslash B = \{x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$*

Remarque 4

Si A est une partie de l'ensemble E alors $\overline{A} = E \backslash A$

Exemple 5

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[.$

$\{0; 1\} = [0; 1] \cap \mathbb{N}.$

Définition 5 (*Parties disjointes*)

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On dit que A et B sont disjointes si $A \cap B = \emptyset$.

Théorème 1 (*Lois de Morgan*)

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

$$\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$$

$$\boxed{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$$

Définition 6 (*Produit cartésien de deux ensembles*)

Soient E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien de E et F et on note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$:

$$\boxed{E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}}$$

Définition 7 (*Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles*)

Soient $E_1, \cdots, E_p$ des ensembles. On appelle p-uplets $(x_1, \cdots, x_p)$ la donnée de $x_1 \in E_1, \cdots, x_p \in E_p$ dans cet ordre. L'ensemble de ces p-uplets est appelé produit cartésien de $E_1, \cdots, E_p$. On le note $E_1 \times \cdots \times E_p$:

$$\boxed{E_1 \times \cdots \times E_p = \{(x_1, \ldots, x_p), x_1 \in E_1, \ldots, x_p \in E_p\}}$$

Notation 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E^p = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}}$ l'ensemble des p-uplets formés d'éléments appartenant tous à E.

Exemple 6

$\mathbb{R}^2$ *est l'ensemble des couples de réels. On a* $\mathbb{R}^2 = \{(x; y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.
$\mathbb{R}^3$ *est l'ensemble des triplets de réels. On a* $\mathbb{R}^3 = \{(x; y; z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$.

Définition 8 (*Quantificateur universel*)

*Le quantificateur " **quel que soit** " ou " **pour tout** ", noté $\forall$, permet de définir l'assertion quantifiée*

$$\boxed{\forall x \in E, P(x)}$$

qui est vraie si pour tous les éléments $x \in E$, l'assertion $P(x)$ est vraie.

Remarque 5

L'assertion " $\forall x \in E,\ P(x)$ " se lit " pour tout x dans E, $P(x)$ ".

Exemple 7

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ *est une assertion vraie (V).*

Définition 9 (*Quantificateur existentiel*)

*Le quantificateur " **il existe** ", noté $\exists$, permet de définir l'assertion quantifiée*

$$\boxed{\exists x \in E, P(x)}$$

qui est vraie s'il existe au moins un élément $x \in E$ tel que l'assertion $P(x)$ soit vraie.

Remarque 6

L'assertion " $\exists x \in E,\ P(x)$ " se lit " il existe x dans E tel que $P(x)$ ".

Exemple 8

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \ln(x) < M$ *est une assertion fausse puisque* $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Théorème 2 (*Négation des assertions avec quantificateurs*)

- $\boxed{[non\,(\forall x \in E, P(x))] \Leftrightarrow [\exists x \in E, non\,(P(x))]}$
- $\boxed{[non\,(\exists x \in E, P(x))] \Leftrightarrow [\forall x \in E, non\,(P(x))]}$

Exemple 9

L'assertion $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 = 0$ *est fausse (F).*
Sa négation $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \neq 0$ *est vraie (V).*

Remarque 7

Si nous utilisons plusieurs quantificateurs, leur ordre peut être important.

Exemple 10

Nous avons vu que $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \ln(x) < M$ *est une assertion fausse.*
Cependant, $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \ln(x) < M$ *est une assertion vraie.*

Définition 10 (*Application d'un ensemble dans un autre*)

Soient E et F deux ensembles. Une application f de E dans F associe à tout élément x de E un unique élément de F noté $f(x)$.

Notation 3

*L'ensemble E s'appelle l'**ensemble de départ** ou l'**ensemble de définition** de l'application f.*
*L'ensemble F est l'**ensemble d'arrivée** de l'application f.*
*Pour tout $x \in E$, $f(x)$ est l'**image** de x et x est un **antécédent** de $f(x)$.*

Notation 4

Pour désigner une application f de E dans F, on note

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

ou encore, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur les ensembles de départ et d'arrivée

$$f : x \mapsto f(x)$$

Exemple 11

Soit f l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$, $f : n \mapsto n^2 + 2$.
Déterminer l'image de -5, les antécédents de 11, de 2 et de 0.

Remarque 8 (***Différence entre application et fonction***)

Si seulement certains éléments de l'ensemble de départ E ont une image par f, mais pas tous, alors on dit que f est une ***fonction*** *de E dans F.*

Exemple 12

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x-5}$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$. Ce n'est pas une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 11 (*Restriction d'une application*)

Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F et A une partie de E. On appelle restriction de f à A et on note $f_{|A}$ l'application de A dans F définie par $f_{|A} : x \mapsto f(x)$

Exemple 13

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $[0; +\infty[$ définie par $f : x \mapsto |x|$. Déterminons la restriction de f à $]-\infty; 0]$ et la restriction de f à $[0; +\infty[$.

Définition 12 (*Prolongement d'une application*)

Soient E et F deux ensembles, A une partie de E et f une application de A dans F. On appelle prolongement de f à E toute application $\tilde{f}$ de E dans F dont la restriction à A est égale à f.

Exemple 14

Soit f l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. Déterminons un prolongement de f à $\mathbb{R}$.

Définition 13 (*Fonction indicatrice*)

Soit E un ensemble et $A \subset E$. On appelle ***fonction indicatrice*** *(ou* ***fonction caractéristique****) de A et on note $\mathbb{1}_A$ l'application de E dans $\{0, 1\}$ définie par*

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ } si \text{ } x \in A \\ 0 \text{ } si \text{ } x \notin A \end{cases}$$

Par définition d'une fonction indicatrice, on en déduit le théorème suivant.

Théorème 3

Soit E un ensemble, $A \subset E$ et $B \subset E$.

$$A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$$

Exemple 15

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, *déterminons* $\mathbb{1}_{\emptyset}(x)$ *et* $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)$.

Propriété 1

Soit E un ensemble, $A \subset E$ et $B \subset E$.

$$\boxed{\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B}$$

$$\boxed{\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B}$$

$$\boxed{\textit{Si } A\cap B = \emptyset \textit{ alors } \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B}$$

$$\boxed{\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A}$$

Démonstration :

Définition 14 (*Composée de deux applications*)

Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. On appelle composée de f par g et on note $g \circ f$ l'application de E dans G définie par

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\to G \\ x &\mapsto g\left(f(x)\right) \end{aligned}$$

Exemple 16

Soient f et g les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par $f : x \mapsto x^2 - 1$ et $g : x \mapsto x - 2$. Déterminons $g \circ f$ et $f \circ g$.

Remarque 9

La composition des applications n'est pas commutative.

Définition 15 (*Application identité*)

Soit E un ensemble. On appelle application identité de E et on note Id_E l'application de E dans E définie par

$$\begin{aligned} Id_E : E &\to E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Propriété 2

Pour toute application f de E dans E, on a

$$f \circ Id_E = f \quad \text{et} \quad Id_E \circ f = f$$

Démonstration :

Remarque 10

*On dit que l'application Id_E est **l'élément neutre** pour la composition des applications de E dans E.*

Définition 16 (*Image directe*)

Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F et A une partie de E. On appelle image directe de A par f et on note $f(A)$ le sous ensemble de F défini par

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}$$

Remarque 11

L'image directe de $A \subset E$ est donc l'ensemble des images par f des éléments de A.

$$\boxed{y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x)}$$

Exemple 17

Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$. Déterminons $f([1,2])$.

Définition 17 (*Image réciproque*)

Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F et B une partie de F. On appelle image réciproque de B par f et on note $f^{-1}(B)$ le sous ensemble de E défini par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

Notation 5

On peut aussi noter $\{f \in B\}$ l'image réciproque de B par f. Cette notation est est plus adaptée aux calculs des probabilités (voir cours sur les variables aléatoires)

Remarque 12

L'image réciproque de $B \subset F$ est donc l'ensemble des antécédents par f des éléments de B.

$$\boxed{x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B}$$

Exemple 18

Soit l'application de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$. *Déterminons* $f^{-1}([1;4])$ *et* $f^{-1}([-2;-1])$.

Notation 6 (*Image réciproque d'un singleton*)

Par abus d'écriture, pour tout $y \in F$, nous noterons $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$. Il s'agit de l'ensemble des antécédents de y par f. On a donc $x \in f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$.

Exemple 19

Soit l'application $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$. Déterminons $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(2)$.

Définition 18 (*Application injective*)

Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F. On dit que f est injective (ou que f est une injection) de E dans F lorsque tout élément de F possède ***au plus un antécédent*** *par f.*

Remarque 13

Si f est injective alors pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est vide (y n'a pas d'antécédent par f) ou réduit à un singleton (y admet un unique antécédent par f).

Théorème 4

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\boxed{f \text{ est injective}}$
- $\boxed{\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'}$
- $\boxed{\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')}$

Exemple 20

Reprenons l'exemple de l'application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$,
$f : n \mapsto n^2 + 2$. *Montrons que f n'est pas injective.*

Théorème 5 (*Composée de deux injections*)

La composée de deux applications injectives est injective.

Démonstration :

Définition 19 (*Application surjective*)

Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F. On dit que f est surjective (ou que f est une surjection) de E dans F lorsque tout élément de F possède ***au moins un antécédent*** *par f.*

Remarque 14

L'application f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Exemple 21

Reprenons l'exemple de l'application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$, $f : n \mapsto n^2 + 2$. Montrons que f n'est pas surjective de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$.

Théorème 6 (*Composée de deux surjections*)

La composée de deux applications surjectives est surjective.

Démonstration :

Définition 20 (*Application bijective*)

Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F. On dit que f est bijective (ou que f est une bijection) de E dans F lorsque f est à la fois injective et surjective. Autrement dit, si tout élément de F possède ***un unique antécédent*** *par f.*

Exemple 22 (*Construction d'un bijection par restriction*)

Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$. Construisons une bijection par restriction des ensembles de départ et d'arrivée.

Définition 21 (*Application réciproque d'une bijection*)

Soit f une bijection de E dans F. On appelle application réciproque (ou bijection réciproque) de f et on note f^{-1} l'application de F dans E qui, à tout $y \in F$, associe son unique antécédent par f. Par définition, on a donc

$$\boxed{\forall (x, y) \in E \times F, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)}$$

Remarque 15

Une application f de E dans F est une bijection si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans E. Dans ce cas, $f^{-1}(y)$ est cette unique solution.

Exemple 23

Déterminons la bijection réciproque de la fonction $\ln$.

Théorème 7

Soit f une bijection de E dans F et f^{-1} sa bijection réciproque.

$$\boxed{f \circ f^{-1} = Id_F \quad et \quad f^{-1} \circ f = Id_E}$$

Démonstration :

Théorème 8

Une application f de E dans F est bijective si et seulement s'il existe une application g de F dans E telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$. Dans ce cas, l'application réciproque de f est $f^{-1} = g$. ∎

Démonstration :

Théorème 9 (*Composée de deux bijections*)

La composée de deux applications bijectives est bijective. Plus précisément, si f est une bijection de E dans F et g une bijection de F dans G, alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G et on a :

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

Remarque 16 (*Courbe représentative*)

Soit f une application de E dans F. L'ensemble des couples $(x, f(x))$ pour $x \in E$ est appelé le ***graphe*** *de f. Si les ensembles E et F sont inclus dans $\mathbb{R}$ alors chaque élément du graphe correspond à un unique point dans le plan muni d'un repère cartésien. On obtient alors une courbe qui est la* ***représentation graphique*** *ou* ***courbe représentative*** *de f.*

Théorème 10 (*Courbes représentatives de f et f^{-1}*)

Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$ et f une application bijective de E dans F. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Exemple 24

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, traçons les courbes représentatives de la fonction exp *et de sa bijection réciproque.*