Chapitre 1 : Logique et raisonnements mathématiques

F. LICINI

franck.licini@telecom-st-etienne.fr

Définition 1 (*Assertion*)

Une assertion (ou proposition) mathématique est un énoncé mathématique, concernant un ou plusieurs objets mathématiques, qui est soit vrai (V) soit faux (F).

Exemple 1

1. *L'assertion "* $4 > 5$ *" est fausse (F).*
2. *L'assertion " 4 est un nombre pair " est vraie (V).*
3. *La phrase "* $\ln(2)$ *vaut approximativement* $0,69$ *" n'est pas une assertion.*

Les **connecteurs logiques** permettent de créer des assertions composées à partir d'autres assertions.

Définition 2 (*Négation d'une assertion*)

Soit P une assertion. La négation de P est l'assertion notée " non (P) " qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.

Il peut être utile de présenter les différentes valeurs de vérités d'une assertion composée sous forme de **table de vérité**. Pour la négation de l'assertion P, cela donne la table suivante :

P	non(P)
V	F
F	V

Remarque 1

En électronique numérique, les valeurs de vérité V et F sont remplacées respectivement par les valeurs 1 et 0.

Définition 3 (*Conjonction de deux assertions*)

Soient P et Q deux assertions. L'assertion notée " P et Q " et appelée conjonction de P et de Q, est l'assertion qui est vraie lorsque P et Q sont simultanément vraies, et fausse dans tous les autres cas.

Définition 4 (*Disjonction de deux assertions*)

Soient P et Q deux assertions. L'assertion notée " P ou Q " et appelée disjonction de P et de Q est l'assertion qui est vraie lorsque lorsqu'au moins une des assertions P et Q est vraie et fausse dans tous les autres cas.

Remarque 2

Le " ou " dans la définition de P ou Q a un sens inclusif et ne doit pas être confondu avec le " ou " du langage courant qui à un sens exclusif.

Définition 5 (*Implication*)

Soient P et Q deux assertions. L'assertion notée " $P \Rightarrow Q$ " et appelée implication de P vers Q, est l'assertion qui est fausse lorsque P est vraie et Q est fausse, et vraie dans tous les autres cas.

Remarque 3

L'assertion " $P \Rightarrow Q$ " se lit " P implique Q " ou encore " ***si*** *P* ***alors*** *Q ".*
Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que P est une ***condition suffisante*** *pour avoir Q ou que Q est une* ***condition nécessaire*** *pour avoir P.*

Définition 6 (*Réciproque*)

Soient P et Q deux assertions. On appelle réciproque de $P \Rightarrow Q$ l'implication $Q \Rightarrow P$.

Exemple 2

Soit x un nombre réel.
L'implication $(x > 5) \Rightarrow (x^2 > 25)$ est vraie (V).
Sa réciproque $(x^2 > 25) \Rightarrow (x > 5)$ est fausse (F). Nous pouvons le démontrer en utilisant le ***contre-exemple*** *$x = -6$.*

Définition 7 (*Equivalence*)

Soient P et Q deux assertions. L'assertion notée " $P \Leftrightarrow Q$ " et appelée équivalence de P et de Q est l'assertion qui est vraie lorsque P et Q sont simultanément vraies ou fausses et fausse dans tous les autres cas.

Remarque 4

L'assertion " $P \Leftrightarrow Q$ " se lit " P est équivalent à Q " ou encore " P ***si et seulement si*** *Q "*

Théorème 1 (*Lois de Morgan*)

Soient P et Q deux assertions. Nous avons les équivalences logiques suivantes :

$$\boxed{[non(P \text{ ou } Q)] \Leftrightarrow [non(P) \text{ et } non(Q)]}$$

$$\boxed{[non(P \text{ et } Q)] \Leftrightarrow [non(P) \text{ ou } non(Q)]}$$

Théorème 2

Soient P et Q deux assertions. Nous avons les équivalences logiques suivantes :

$$(non\,(non\,(P))) \Leftrightarrow P$$

$$[P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [non(P) \; ou \; Q]$$

$$[non\,(P \Rightarrow Q)] \Leftrightarrow [P \; et \; non(Q)]$$

$$\boxed{[P \Leftrightarrow Q] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \;\; et \;\; (Q \Rightarrow P)]}$$

Définition 8 (*Contraposée d'un implication*)

Soient P et Q deux assertions. L'implication $non(Q) \Rightarrow non(P)$ est la contraposée de $P \Rightarrow Q$.

Théorème 3

Soient P et Q deux assertions. L'implication $P \Rightarrow Q$ et sa contraposée sont équivalentes.

$$\boxed{[P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [non(Q) \Rightarrow non(P)]}$$

Nous utilisons la logique pour démontrer qu'une assertion est vraie. Les principaux types de raisonnement sont :

- Raisonnement par contraposition
- Raisonnement par l'absurde
- Raisonnement par double implication
- Raisonnement par analyse-synthèse
- Raisonnement par disjonction des cas

En supposant que non(Q) est vraie, nous démontrons que non(P) est vraie. Ce raisonnement permet de démontrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie.

Exemple 3

Soit n un entier naturel. Montrons que si n^2 est pair alors n est pair.

En supposant que non(P) est vraie, nous démontrons que Q et non(Q) sont vraies. Nous disons alors que nous avons obtenu une contradiction. Ce raisonnement permet de démontrer que P est vraie.

Exemple 4

Montrons que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Le raisonnement par analyse-synthèse est une méthode qui permet d'établir les solutions d'un problème en deux étapes.
Phase d'analyse : on suppose le problème résolu et on en déduit des conditions nécessaires sur les solutions.
Phase de synthèse : on détermine les solutions.

Exemple 5

Résoudre l'équation $\sqrt{x+2} = x$.

On est parfois amené à distinguer plusieurs cas pour démontrer qu'une assertion est vraie (ou fausse). On dit alors qu'on fait une démonstration par disjonction des cas.

Exemple 6

Soit n un entier naturel. A quelle condition $n^2 + 3n + 2$ est-il divisible par 3 ?