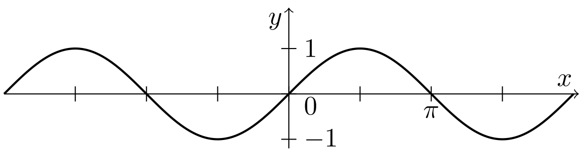
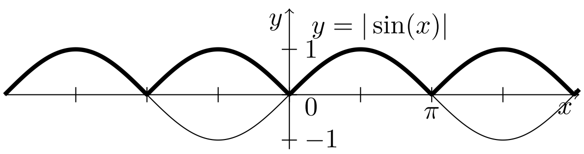
Exemple 9

La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto |\sin(x)|$ est continue sur $\mathbb{R}$.



Courbe de la fonction $x \mapsto \sin(x)$



Courbe de la fonction $x \mapsto |\sin(x)|$

Exemple 10

Soit $f : x \mapsto \cos(x) - x$. La fonction f est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ car différence de deux fonctions continues.

$$f(0) = \cos(0) - 0 = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

On en déduit que $f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ et donc, d'après le théorème de Bolzano (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), il existe $c \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f(c) = 0$ c'est-à-dire $\cos(c) = c$.
Remarque : comme $f(0) \neq 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, on peut aussi conclure que $c \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Exemple 11

Soit $f : x \mapsto x^2$.
La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$.
La fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ car si $0 \leq x_1 < x_2$ alors $x_1 + x_2 > 0$ et $x_1 - x_2 < 0$ donc, comme $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$, on a $x_1^2 - x_2^2 < 0$ c'est-à-dire $f(x_1) < f(x_2)$.
D'après le théorème de la bijection, f réalise donc une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle $J = f(I)$. Comme $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, on a $J = f([0; +\infty[) = [0; +\infty[$.
Remarque 1 : la stricte croissance de f peut aussi être établie avec un calcul de fonction dérivée (le résultat utilisé sera revu dans un chapitre du cours de S2). Au lycée, un tel résultat peut être établi en construisant le tableau des variations de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
Remarque 2 : ce théorème de la bijection permet de démontrer "rapidement" qu'une fonction est bijective d'un intervalle I sur l'intervalle $f(I)$. Par contre, il ne permet pas de déterminer une expression de la bijection réciproque (comme nous l'avons fait au chapitre 2 du S1, Ensembles et applications).

Exemple 12

Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{jx}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x) + j\sin(x)$.
Or, les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.