

Solution 1.

Solution 2.

Solution 3.

Solution 4.

Solution 5.

1. Par définition, $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. Or, d'après le cours $\mathbb{1}_{A \cap \overline{B}} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\overline{B}}$ donc

$$\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_{A \cap \overline{B}} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\overline{B}}$$

De plus, toujours d'après le cours, $\mathbb{1}_{\overline{B}} = 1 - \mathbb{1}_B$ donc

$$\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A (1 - \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

2. Par définition, $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Donc, d'après la question 1.

$$\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_{A \cup B} - \mathbb{1}_{A \cap B}$$

Or, toujours d'après le cours, $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ donc

$$\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B) \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

$$\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_B \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

Comme $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_B$, on conclut

$$\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

Solution 6.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a $1 \leq p$ donc $0 < \frac{1}{p} \leq 1$ et de même, $0 < \frac{1}{q} \leq 1$. On en déduit $0 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 2$.

Ainsi, l'ensemble $X = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^* \right\}$ est minoré par 0 et majoré par 2.

2. On peut déjà remarquer que l'ensemble X est une partie non vide de \mathbb{R} . Comme X est minoré, il admet donc une borne inférieure. De même, comme X est majorée, il admet une borne supérieure.

a) Montrons que $\text{Sup}(X) = 2$.

D'après la question 1., 2 est un majorant de X .

Or $2 \in X$ car $2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$ (on prend $p = 1$ et $q = 1$).

Donc $\text{Sup}(X) = \text{Max}(X) = 2$.

b) Montrons que $\text{Inf}(X) = 0$.

D'après la question 1., 0 est un minorant de X .

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2}{n} \in X$ car $\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ (on prend $p = q = n$).

Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$.

Donc $\text{Inf}(X) = 0$.

Remarques :

En effet, soit $m > 0$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors

$\frac{2}{n} < m$. On a donc un élément (on en a même une infinité) dans X qui est strictement inférieur à m . Cela prouve que m n'est pas un minorant de X . Ainsi, le plus grand des minorants de X est 0, c'est-à-dire $\text{Inf}(X) = 0$.

On peut aussi raisonner sans utiliser la notion de limite. Soit $m > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2}{m} < n$

(il suffit de prendre pour n un entier strictement supérieur à la partie entière du nombre réel $\frac{2}{m}$) ce qui

donne $\frac{2}{n} < m$. Comme $\frac{2}{n} \in X$ on en déduit que m n'est pas un minorant de X . Ainsi, le plus grand des minorants de X est 0, c'est-à-dire $\text{Inf}(X) = 0$.